ریاضیات
پیش دانشگاهی

فنی مهندسی و علوم پایه

دکتر مسعود نیکوکار
دکتر فرزام گلگویی

گسترش علوم پایه

ریاضی پیش (دکتر مسعود نیکوکار - دکتر فرزام گلگون)

Subject:
Year: Month: Date:

فصل اول «مجموعه‌ها»

$\forall$ به ازای هر

$\nexists$ وجود ندارد

$\exists$ وجود دارد

تعریف: گروه یا دسته ای از اشیای معین و متمایز را مجموعه گویند

مثال: مجموعه روزهای زوج هفته ✓ ص

گروه مردان قدبلند ✗ اعداد خیلی بزرگ ✗ (عضو $\in$)

مجموعه ها را با حروف بزرگ و عضوهای مجموعه را با حروف کوچک نشان می‌دهند.

تعریف زیر مجموعه: فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند آنگاه A را زیر مجموعه B گوییم

$A \subseteq B$ اگر تمام اعضای A در مجموعه B باشد

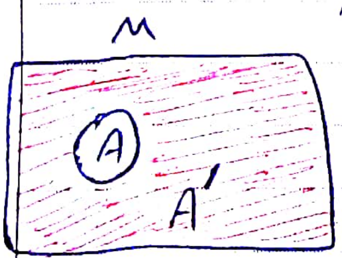
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{2, 3\} \Rightarrow \boxed{B \subseteq A}$

(M و U) مجموعه‌ی مرجع: بزرگترین مجموعه‌ای که تمام عضوهای مورد بحث را در بر گیرد

متمم مجموعه: فرض کنیم مجموعه M و A را داشته باشیم متمم A را با A' (A^c) نمایش می‌دهیم.

$A' = \{x \mid x \in M , x \notin A\}$



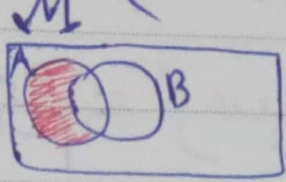
$M = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$A = \{1, 3, 5, \ldots\}$

$A' = \{2, 4, 6, \ldots\}$

تعریف: دو مجموعه A و B را مساوی گوییم و می نویسیم $A=B$ اگر $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$

اعمال روی مجموعه ها: $A-B=\{x \mid x\in A, x\notin B\}$, $\cap$, $\cup$



$A-B=A\cap B'$

خواص مجموعه ها:

۱- خاصیت جابه جایی: $A\cap B=B\cap A$ و $A\cup B=B\cup A$

۲- خاصیت $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

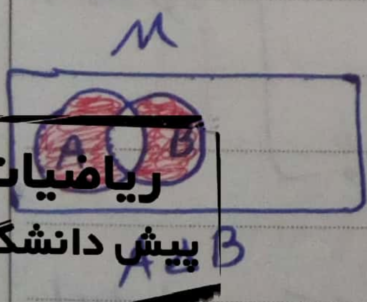
$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

(۳) خاصیت توزیع پذیری: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(۴) قانون جذب: $A\cap(A\cup B)=A$ $A\cup(A\cup B)=A$

تفاضل متقارن: $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$



قوانین دمورگان

$(A\cup B)'=A'\cap B'$

$(A\cap B)'=A'\cup B'$

Subject:
Year: Month: Date:

حاصل ضرب دکارتی مجموعه‌ها:

تعریف: حاصلضرب دکارتی دو مجموعه A و B را که با $A \times B$ نشان می‌دهیم

بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

زوج مرتب

$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), \dots\}$

تعداد عضوهای A <= تعداد عضوهای $A \times A$

(تعداد عضوهای B) × (تعداد عضوهای A) <= تعداد عضوهای $B \times A$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ مجموعه اعداد طبیعی

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ مجموعه اعداد صحیح

$\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$ $Q \Rightarrow \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ یا

مجموعه اعداد گویا در کسری

$\mathbb{Z} \subseteq Q$

$Q^c = Q'$

مجموعه اعداد اصم: اعدادی که گویا نباشند.

$\frac{2}{3} = /666\ldots = /\overline{6}$

اعداد گویا: یا پایان ناپذیر متناوب / یا پایان پذیر

$\frac{3}{8} = /375$

مجموعه اعداد حقیقی

$\mathbb{R} = Q \cup Q^c$

اعداد اصم ⟸ $\sqrt{3} = 1/\dots$ ، $\pi = 3/1415\dots$ عدد پی

SHAFAGH

Subject:
Year: Month: Date:

فصل ۲: توابع و معادلات:

تعریف رابطه: مجموعه های زوج مرتب $R=\{(x,y) \mid x\in A, x\in B, \dots\}$

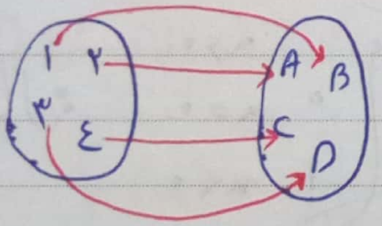
$A=\{1,2,3,4\}$ $R_1=\{(x,y) \mid x,y\in A, x>y\}$

$\Rightarrow \{(2,1),(3,1),(4,1),(3,2),(4,2),(4,3)\}$

تعریف تابع: در آن هیچ دو زوج متمایزی دارای مؤلفه اول یکسان نباشد.

$f=\{(1,2)(4,3),(2,2)\}$ ص ✓

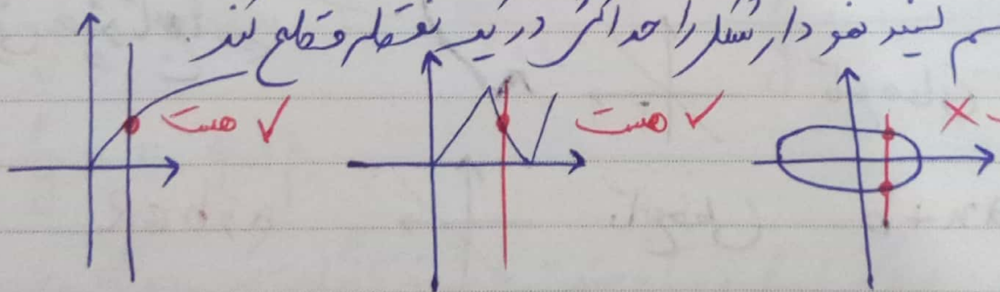
نمایش تابع:



نمودار پیکانی

* فقط باید یک پیکان خارج شود *

نکته: در نمایش هندسی نموداری نمایش دهنده یک تابع است که اگر خطی موازی محور y ها رسم کنیم نمودار شکل را حداکثر در یک نقطه قطع کند.



نمایش به صورت ضابطه و قانون: تعریف: یک تابع f قاعده ای است که یک مجموعه مثل D به نام دامنه را به مجموعه ای مثل R (به نام برد) نظیر کند بدین صورت که به ازای هر عنصر $x\in D$ عنصر منحصر به فرد $f(x)\in R$ را خواهیم داشت.

$F: D \to R$

$x \to f(x)$

به هر عنصر از دامنه دقیقاً یک عضو R برد نظیر می شود.

Subject:
Year: Month: Date:

تابع حقیقی: توابعی که دامنه و برد آنها زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \to x^2+1$

$f(x) = x^2+1 \quad D=\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\sqrt{x} \quad D=[0,+\infty)$ یا $x \geq 0$

تذکر: ممکن است تابعی دارای چند ضابطه باشد.

$$F(x) \Rightarrow \begin{cases} f_1(x) & x \in D_1 \\ f_2(x) & x \in D_2 \end{cases}$$

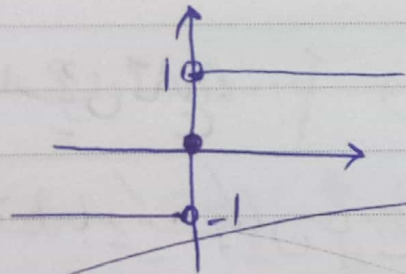
الف) $D_1 \cup D_2 = D_f$

ب) $D_1 \cap D_2 = \phi$

ج) f_1 و f_2 هر دو تابع باشد.

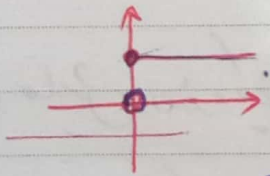
مثال:

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$



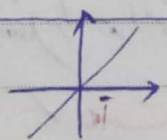
تابع پله‌ای:

$$U(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

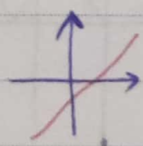


معرفی چند تابع:

$f(x)=x$ تابع همانی



$f(x)=ax+b$ تابع خطی $\quad a,b \in \mathbb{R}$



$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots a_nx^n$

تابع کسری (گویا):

$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)} \quad q(x) \neq 0$

$f(x)$ و $q(x)$ چندجمله‌ای باشد.

SHAFAGH

Subject:
Year: Month: Date:

یافتن دامنه توابع: مثال: $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ $x^2-4\geq 0$ $x^2\geq 4$ و

$|x|\geq 2 \Rightarrow$ دامنه $x\geq 2$ و $x\leq -2$ $D_f=\{(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ $D_f=R-\{1\}$

$f(x)=\dfrac{\sqrt{3x-1}}{x-2}$ دامنه $\Rightarrow 3x-1\geq 0 \rightarrow x\geq \frac{1}{3}$ $D=[\frac{1}{3},2)\cup(2$

اعمال روی توابع: «جبر توابع»

① $(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$ $x\in D_f\cap D_g$

② $(f\cdot g)(x)=f(x)\times g(x)$ $x\in D_f\cap D_g$

③ $\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ $g(x)\neq 0$ $D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=$

$f(x)=x^2+1$ $g(x)=x+1$ $D(f)=R$ $D(g)=R$

$f+g \Rightarrow x^2+x+2$ $D_{f+g}=R$ $\frac{f}{g}(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$

$D_{\frac{f}{g}}=R-\{-1\}$

ترکیب توابع: فرض کنید f و g دو تابع حقیقی باشند آنگاه ترکیب دو تابع به صورت زیر است

$f\circ g$ یا $g\circ f$ $f\circ g(x)=f(g(x))$

$g\circ f=g(f(x))$ $D_{f\circ g}=x\in D_g \mid g(x)\in D_f$

SHAFAGH

باید ← $R_g\cap D_f\neq\emptyset$

$D_{g\circ f}=x\in D_f \mid f(x)\in D_g$ باید ← $R_f\cap D_g\neq\emptyset$

مثال: $f(x)=x^4$ $g(x)=2x-1$

$f\circ g=(2x-1)^4$ $g\circ f \Rightarrow 2(x^4)-1$

$D_f=R$ $D_{g\circ f}=R$

$f(x)=x^2+3x-1$ $g(x)=x^4$

$f\circ g=f(g(x))=(x^4)^2+3(x^4)-1 \Rightarrow x^8+3x^4-1$

تذکر: بهتر است دامنه توابع ترکیب را از روی تعریف محاسبه کنیم نه از روی ضابطه

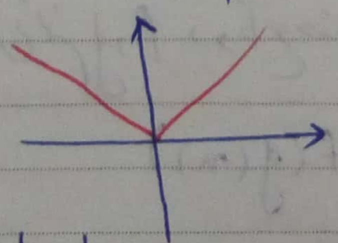
$f(x)=x^2+1$ $g(x)=\sqrt{x}$ $f\circ g(x)=(\sqrt{x})^2+1=x+1$

از روی ضابطه $x\in R$ از روی تعریف $\Rightarrow D_{f\circ g}=x\in D_g \mid g(x)\in D_f$

$\Rightarrow x\in[0,+\infty) \mid g(x)\in \underbrace{D_f}_{R}\} = [0,+\infty)$ ✓

چند تابع خاص = تابع قدر مطلق $f: \mathbb{R}\to \mathbb{R}$

$x\to|x|$ $f(x)=|x|$ $|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0\end{cases}$



خواص تابع قدر مطلق:

① $a^2=b^2 \Rightarrow |a|=|b|$ ② $|x|\geq a$, $a>0 \Rightarrow x\geq a$, $x\leq -a$

$|x|<a$, $a>0 \Rightarrow -a<x<a$

③ $-|a|\leq a\leq |a|$

۴ خواص قدرمطلق

$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ ④ $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

⑤ نامساوی مثلث الف $|a+b| \le |a|+|b|$ **

ب $|a-b| \ge |a|-|b|$ ***

ج $|a+b| \ge |a|-|b|$ ****

تابع جزء صحیح: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ $x \longmapsto [x]$

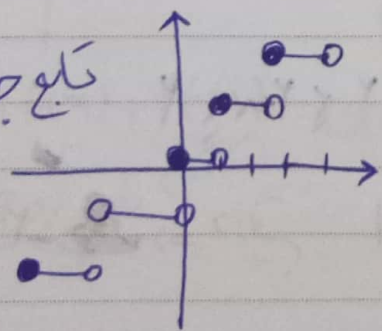
$f(x)=[x]$ $\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow x=[x]+p$ $0\le p<1$

$[x]$ = بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از x : $[۳/۲]=۳$

$۳/۲ \Rightarrow ۳+۰/۲$ $[-۴/۶]=-۵$ $-۴/۶=-۵+۰/۴$

$\forall x\in: n\le x<n+1 \Rightarrow [x]=n$ تعریف $n\in\mathbb{Z}$

نمودار جزء صحیح



خواص جزء صحیح

① $x-1<[x]\le x$

② $[x]\le x<[x]+1$

۳- $\forall x\in\mathbb{R}$ ، $0\le x-[x]<1$

④ $[x]+[-x] = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x\in Z \\ -1 & \text{اگر } x\notin Z \end{cases}$

⑤ $\forall x\in R, a\in Z: [x+a]=[x]+a$

مثال: $f(x)=x-[x]$ $D_f=[-2,3]$

① $-2\le x<-1$ $[x]=-2 \Rightarrow y=x-[x]= y=x+2$

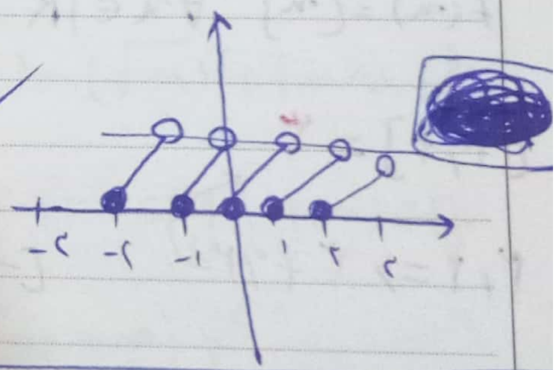
② $-1\le x<0$ $[x]=-1$ $y=x-[x]=y=x+1$

③ $0\le x<1$ $[x]=0 \to y=x$

④ $1\le x<2$ $[x]=1 \to y=x-[x]=x-1$

⑤ $2\le x<3$ $[x]=2 \to y=x-[x]$ $y=x-2$

⑥ $x=3 \Rightarrow [x]=3 \to y=0$ ✓



$f(x)=[2x+1]$

$D_f=[-1,1]$

$f(x)=[2x]+1$ $-1\le x\le 1 \Rightarrow -2\le 2x\le 2$

① $-2\le 2x<-1 \to [x]=-2$ $y=-1$ [illegible] $\Rightarrow$ [illegible]

② $-1\le 2x<0 \Rightarrow [2x]=-1$ $y=0 \to -\frac{1}{2}\le x<0$

③ $0\le 2x<1 \Rightarrow [2x]=0 \to y=1 \to 0\le x<\frac{1}{2}$

SHAFAGH ④ $1\le 2x<2 \Rightarrow [2x]=1$ $y=2 \to \frac{1}{2}\le x<1$

⑤ $[x]=1 \Rightarrow [2x]=2$

تابع زوج و فرد: فرض کنیم f تابعی حقیقی باشد بنابراین f را تابعی زوج گوییم

اگر به ازای هر $x \in D_f$ ← هم $-x \in D_f$ باشد و $f(-x)=f(x)$

و آنرا تابعی فرد گوییم ← هرگاه به ازای $x \in D_f$ ، $-x \in D_f$ باشد

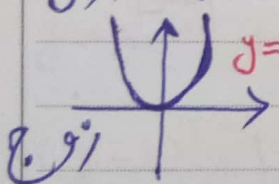
و $f(-x)=-f(x)$ مثال ←

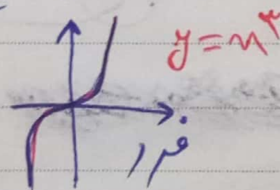
① $f(x)=x^2$ $\quad f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$ تابع زوج

② $g(x)=x^3$ $\quad f(-x)=(-x^3)=-x^3=-f(x)=$ تابع فرد

③ $h(x)=x^2+x+1$ $\quad h(-x)=(-x^2)+(-x)+1=\boxed{x^2-x+1}$ نه فرد، نه زوج

نکته: تابع فرد نسبت به مبدأ مختصات و تابع زوج نسبت به محور y ها متقارن می‌باشند.





نکته ۲) اگر $x \in D_f$ و $-x \in D_f$ باشد بنابراین $h(x)=f(x)+f(-x)$ یک تابع زوج است

و $g(x)=f(x)-f(-x)$ تابعی فرد است.

اثبات: $h(-x)=f(-x)+f(-(-x))=f(-x)+f(x)=h(x)$

$g(-x)=f(-x)-f(-(-x))=f(-x)-f(x) \Rightarrow -(f(x)-f(-x))=-g(x)$ فرد

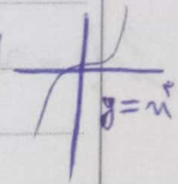
نکته ۳) برای هر تابع f با دامنه متقارن می‌توان آن را به صورت یک تابع زوج و یک فرد نوشت

$$f(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))+\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$$

تابع پوشا: فرض کنیم تابع f یک تابع حقیقی باشد بنابراین آن را پوشا گوییم

هرگاه بازای هر y عضو برد تابع وجود داشته باشد یک x عضو دامنه تابع به طوری که

$f: X \longrightarrow Y \quad y=f(x) \quad \forall y \in Y \ \exists x \in X : f(x)=y$



$D=R$
$R=R$

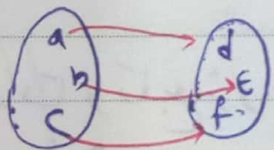
تابع یک به یک: f را تابعی یک به یک گوییم هرگاه.

$\forall x_1, x_2 \in D_f : f(x_1)=f(x_2) \overset{\text{هرگاه}}{\Rightarrow} x_1=x_2$ یا $x_1 \neq x_2$
$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

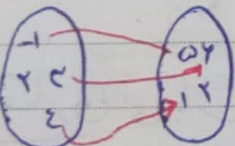
مثال $\Rightarrow exp = y = x^2+1$

$\forall x_1, x_2 = f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2+\cancel{1} = x_2^2+\cancel{1}$

$x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \mp x_2$ [redacted]



تابع پوشا

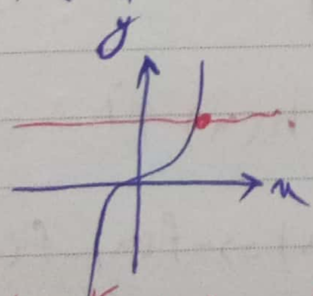


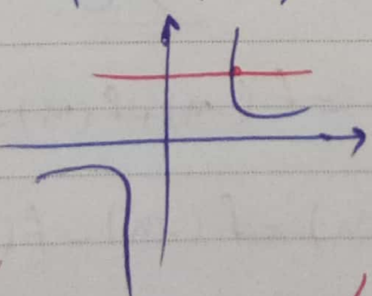
پوشا نیست [redacted]

مثال: $f(x)=\frac{1}{x}$ $x_1=x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2}$

یک به یک

$f(x) \Rightarrow x^3 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow \sqrt[3]{x_1^3} = \sqrt[3]{x_2^3} \Rightarrow x_1=x_2$ ✓





«حداکثر در یک نقطه قطع کند»

نکته: در نمایش هندسی، اگر خطی را موازی محور x ها رسم کنیم و نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند آن را تابع یک به یک می نامیم. ***

معکوس یک به یک: برای به دست آوردن معکوس یک تابع باید یک به یک باشد.

$f: R \to B \quad x \to f(x) \quad f = \{(x,y) \mid y = f(x)\}$

$f^{-1} = \{(y,x) \mid y = f(x)\} \quad D_{f^{-1}} = R_f \,,\; R_{f^{-1}} = D_f$ *

روش به دست آوردن معکوس یک تابع:

معادله $y=f(x)$ را نسبت به x حل می‌کنیم به طوری که معادله $x = g(y)$ به دست آید

پس با تغییر موقعیت x و y در جای‌گذاری بین هم، معادله $y = f^{-1}(x)$ را به دست

خواهیم آورد. مثال

$\frac{y}{1} = \frac{x+1}{x} \Rightarrow yx = x+1 \Rightarrow yx - x = 1$

$x(y-1) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{y-1} \quad y = f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$ ✓

$y = \sqrt{x-1} + 1 \Rightarrow y-1 = \sqrt{x-1} \Rightarrow (y-1)^2 = x-1$

$(y-1)^2 + 1 = x \xRightarrow{\text{جایگذاری}} y = f^{-1}(x) = (x-1)^2 + 1$

$y = x^2 - x - 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x + \frac{1}{4} - 2 - \frac{1}{4}$

$y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \Rightarrow y + \frac{9}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{y + \frac{9}{4}} = x - \frac{1}{2}$

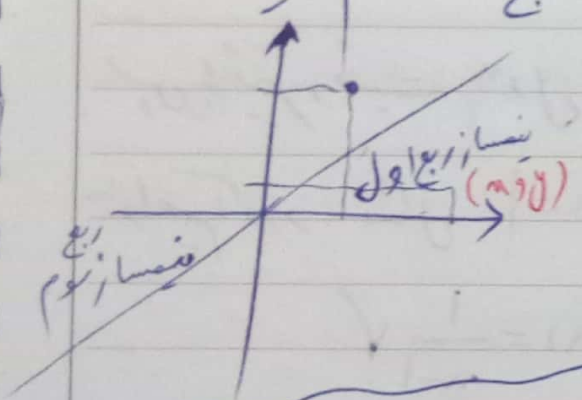
$\sqrt{y + \frac{9}{4}} + \frac{1}{2} = x \quad y = f^{-1}(x) = \sqrt{x + \frac{9}{4}} + \frac{1}{2}$

نکته: اگر فرض کنیم تابع f، یک به یک نباشد می توان با شکافتن دامنه آن را یک به یک کرد و معکوس آن را بدست آورد. $(0,+\infty]$ دیگ یک به یک است $y=x^2$

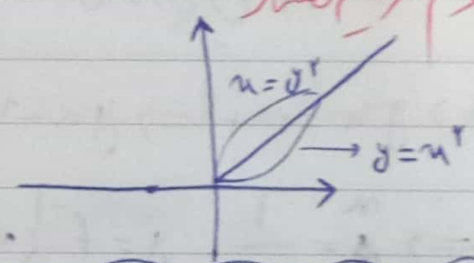
*** اگر $f=\{(x,y) \mid y=f(x)\}$

$f^{-1}=(y,x) \mid y=f(x)$

نکته: تابع f و تابع معکوس آن نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه اند...



نیمساز ربع اول و سوم قرینه هستند



$y=x^2 \quad D=[0,+\infty)$

سوال: معادله را حل کنید.

$2^{2-x}+2^{x+1}=6$

$\frac{2^2}{2^x}+2^{x+1}=6 \Rightarrow \frac{2^2+2^x\times 2^{x+1}}{2^x}=6 \Rightarrow \frac{2^2+2^{\overset{2x+1}{\overbrace{x+x+1}}}}{2^x}=6$

$\Rightarrow 2^2+2^{2x+1} \Rightarrow 3\times 2^{x+1} \Rightarrow 2^2=3\times 2^{x+1}-2^{2x+1}$

$\Rightarrow \underbrace{2\times 2}_{x+1+x \quad 2^2\times 1}=2^{x+1}(3-2^x)$ ① ②

$2^1=2^{x+1} \Rightarrow 1=x+1 \Rightarrow \boxed{x=0}$

$2^1=3-2^x \Rightarrow 2^x=3-2=2^0 \Rightarrow \boxed{x=0}$

oke

SHAFAGH

$2^2=2^{x+1} \Rightarrow 2=x+1 \Rightarrow \boxed{x=1}$

② $\Rightarrow 1=3-2^x \Rightarrow 2^x=\cancel{3}-1=2^1 \Rightarrow \boxed{x=1}$

نکته:

$f^{-1} o f(x)=x \quad x\in D_f$

$f o f^{-1}(x)=x \quad x\in D_{f^{-1}}$

مثال: $f(x)=\frac{x+1}{x}$, $f^{-1}(x)=\frac{1}{x-1}$ $\quad fof^{-1}=f(f^{-1}(x))$

$=\frac{\frac{1}{x-1}+1}{\frac{1}{x-1}}=\frac{\frac{1+x-1}{x-1}}{\frac{1}{x-1}}=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}}=\frac{x}{1}\Rightarrow x$

$f^{-1}of(x)=f^{-1}(f(x))=\frac{1}{\frac{x+1}{x}}-1$

$\Rightarrow \frac{1}{\frac{x+1-x}{x}}=\frac{x}{1}=x \quad x\in D_f$

*** توابع نمایی و لگاریتمی:

$\boxed{f(x)=a^x \quad a\neq 1 \;,\; a>0}$

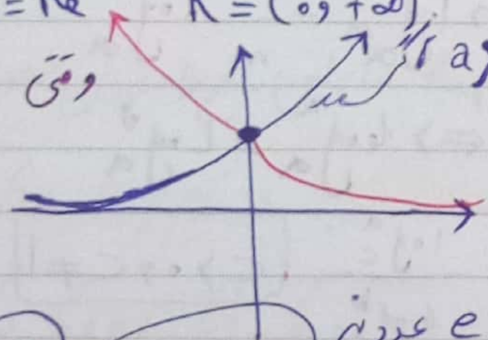
$a=2$

x	-1	۰	۱	۲	۳	...	۱۰۰۰
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	۱	۲	۴	۸	...	2^{1000}

$D=\mathbb{R}$ $\quad R=(0,+\infty)$

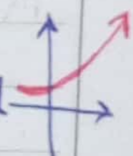
اگر $a>1$

وقتی $0<a<1$



تابع نمایی طبیعی:

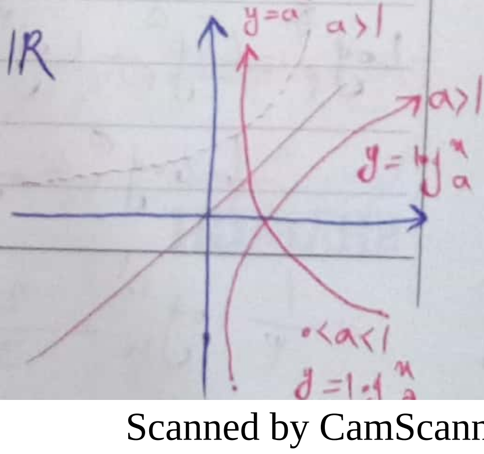
$e=a=2/718...$ عدد نپر $\quad \boxed{y=e^x} \quad e>1$



$D=\mathbb{R}$ $\quad R=(0,+\infty)$

تابع لگاریتمی، معکوس تابع نمایی است ✓

$y=\log_a^x \Leftrightarrow x=a^y \quad D=(0,+\infty) \quad R=\mathbb{R}$



Subject:
Year: Month: Date:

خواص توابع لگاریتمی: هرگاه پایه لگاریتم نوشته نشده برابر ۱۰ است.

① $\log_a^a = 1$ ✓

② $\log_a^{xy} = \log_a^x + \log_a^y$

$z = \log_a^{xy} \Rightarrow xy = a^z$

$x \times y = a^{z_1} \times a^{z_2} = a^{z_1+z_2}$ ①

$z_1 = \log_a^x \Rightarrow x = a^{z_1} \Rightarrow$ $xy = a^z$ ②

$z_2 = \log_a^y \Rightarrow y = a^{z_2}$ ①,② $\Rightarrow z = z_1 + z_2 \Rightarrow \log_a^{xy}$

$\log_a^x + \log_a^y$

③ $\log_a^{\frac{x}{y}} = \log_a^x - \log_a^y$ ④ $\log_a^{x^n} = n\log_a^x$

⑤ $\log_a^{\frac{n}{m}} = \frac{1}{m}\log_a^n$ ⑥ $\Rightarrow \log_{a^m}^{x^n} = \frac{n}{m}\log_a^x$

⑦ $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$ ۸- $x = y \Leftrightarrow \log_a^x = \log_a^y$

⑨ $a^{\log_a^x} = x$ ۱۰ $\Rightarrow \log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$ $\boxed{c > 0, c \neq 1}$

مثال: $\log_2^{10} = \log_2^{2\times5} = \log_2^2 + \log_2^5 = 1 + \log_2^5$ *

$\log_4^{\frac{5}{2}} = \log_4^5 - \log_4^2 = \log_{2^2}^5 - \log_{2^2}^2 = \frac{1}{2}\log_2^5 - \frac{1}{2}\log_2^2$

$\frac{1}{2}\log_2^5 - \frac{1}{2}$

$\log_{10}^{\sqrt[3]{100}} = \log_{10}^{100^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{3}\log_{10}^{100}$

$= \frac{1}{3}\log_{10}^{10^2} = \frac{2}{3}$ ✓

لگاریتم

مثال:

$$\log_4^{\sqrt{2}} + \log_9^{\sqrt{3}} = \log_{2^2}^{2^{\frac{1}{2}}} + \log_{3^2}^{3^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{1}}\log_2^2 + \frac{\frac{1}{2}}{2}\log_3^3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

مثال: $\log_3^{(x-2)} + \log_3^{(x+2)} = \log_3^4 \quad \log_3^{(x-2)(x+2)} = \log_3^4$

$$(x-2)(x+2) = 4 \Rightarrow x^2 - 4 = 4 \Rightarrow x^2 = 8 \quad x = \mp\sqrt{8} \Rightarrow 2\sqrt{2}$$

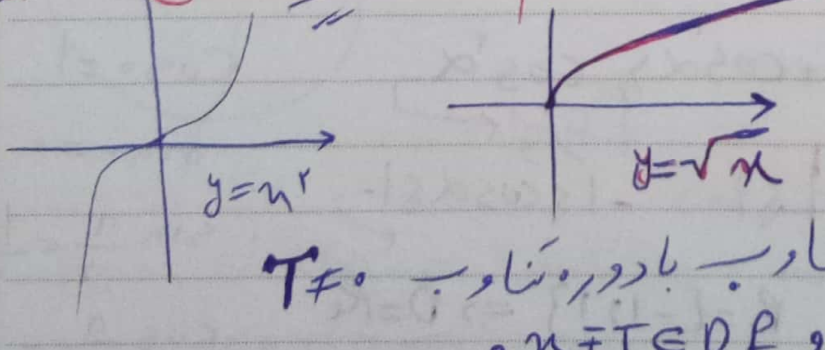
معکوس تابع نمایی طبیعی تابع لگاریتمی طبیعی خواهد بود...

$y \Rightarrow \log_e^x = \ln x \qquad a^x \Rightarrow e^{x\ln a}$

توابع صعودی و نزولی:

تابع صعودی: فرض کنیم که f تابعی حقیقی باشد بنابراین، از ای x_1, x_2 عضو دامنه f اگر $x_1 < x_2$ باشد داشته باشیم $f(x_1) \le f(x_2)$ بنابراین تابع را صعودی صعودی می‌نامیم. $(f(x_1) < f(x_2)) \Leftarrow$ صعودی اکید. «تابع نزولی برعکس است»

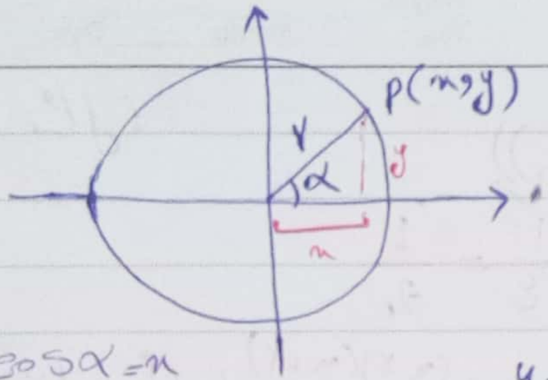
نکته: هر تابع صعودی یا نزولی را تابع یکنوا گوییم و هر تابع یکنوا یک تابع یک به یک است



تابع متناوب: تابع f را متناوب با دوره تناوب $T \neq 0$ گوییم هرگاه برای $x \in D_f$ و $x \mp T \in D_f$

SHAFAGH $f(x \mp T) = f(x)$

Subject:
Year: Month: Date:



توابع مثلثاتی:

$1\,rad = \frac{180}{\pi}$

$1^\circ = \frac{\pi}{180}\,rad$

$\cos\alpha = x$

$\sin\alpha = y$

$60^\circ = 6 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$

$\frac{5}{12}\pi\,rad = \frac{5}{12}\pi \times \frac{180}{\pi} = 75^\circ$

تذکر: در توابع مثلثاتی بهتر است درجه بر حسب Rad بیان شود.

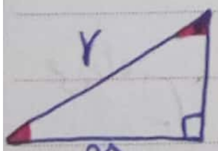
$30^\circ = \frac{\pi}{6}$ $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ $180^\circ = \pi$ $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$

$360^\circ = 2\pi$

بر اساس شکل بالا

$\sin\alpha = \frac{y}{r}$ $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ $\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\sec\alpha \Rightarrow \frac{1}{\cos\alpha}$ $\csc\alpha \Rightarrow \frac{1}{\sin\alpha}$



$x^2+y^2=r^2$ $\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1$

$(\frac{x}{r})^2+(\frac{y}{r})^2=1$ $\boxed{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1}$

$\sin^2\alpha \geq 0$ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha \geq \cos^2\alpha$

پس

$1 \geq \cos^2\alpha \Rightarrow |\cos\alpha| \leq 1$ $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

$y = \cos x$ $R=[-1,1] \Rightarrow D=\mathbb{R}$

SHAFAGH

$y = \sin x$ $R=[-1,1]$ $D=\mathbb{R}$

$\boxed{\cos^2\alpha \leq 1 \Rightarrow |\cos\alpha| \leq 1}$

$\cos 0 = 1$

$\sin 0 = 0$

$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

«توابع مثلثاتی»

Subject:
Year: Month: Date:

$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ $\sin\frac{3\pi}{2}=-1$

$\sin\frac{\pi}{2}=1$ $\sin\pi=0$ $\cos\frac{3\pi}{2}=0$

$\cos\frac{\pi}{2}=0$ $\cos\pi=-1$ $\sin 2\pi=0$

$\cos 2\pi=1$

$\cos(\alpha \mp 2n\pi)=\cos\alpha$ «***» $\tan\frac{\pi}{4}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\boxed{n\in\mathbb{N}}$

$\sin(\alpha \mp 2n\pi)\Rightarrow\sin\alpha$

*** $\sin(-\alpha)=-y\Rightarrow-\sin\alpha$ ✓

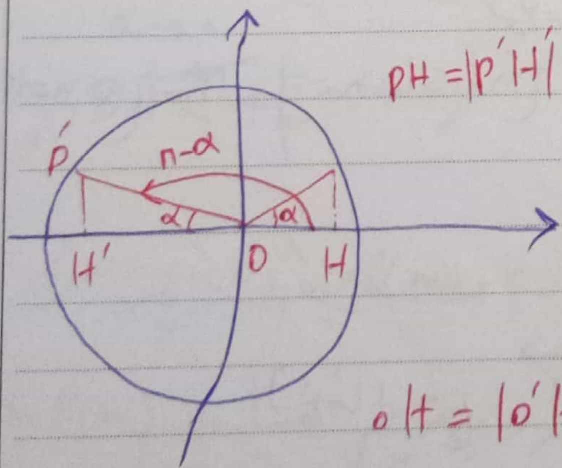
$\cos(-\alpha)=x=\cos\alpha$ ✓

نکته: تابع $\cos\alpha$ یک تابع زوج و تابع $\sin\alpha$ یک تابع فرد می‌باشد...

$f(-x)=f(x)$ تابع زوج

$f(-x)=f(-x)$ تابع فرد

***



$PH=|P'H'|\Rightarrow\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$

$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$

$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$

$OH=|O'H'|$

$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$

$\sin(\pi+\alpha)\Rightarrow-\sin\alpha$ $\tan(\pi+\alpha)\Rightarrow\tan\alpha$

$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$ $\cot(\pi+\alpha)\Rightarrow\cot\alpha$

SHAFAGH

$\sin(a+b)=\sin\alpha\cos b+\sin b\cos\alpha$

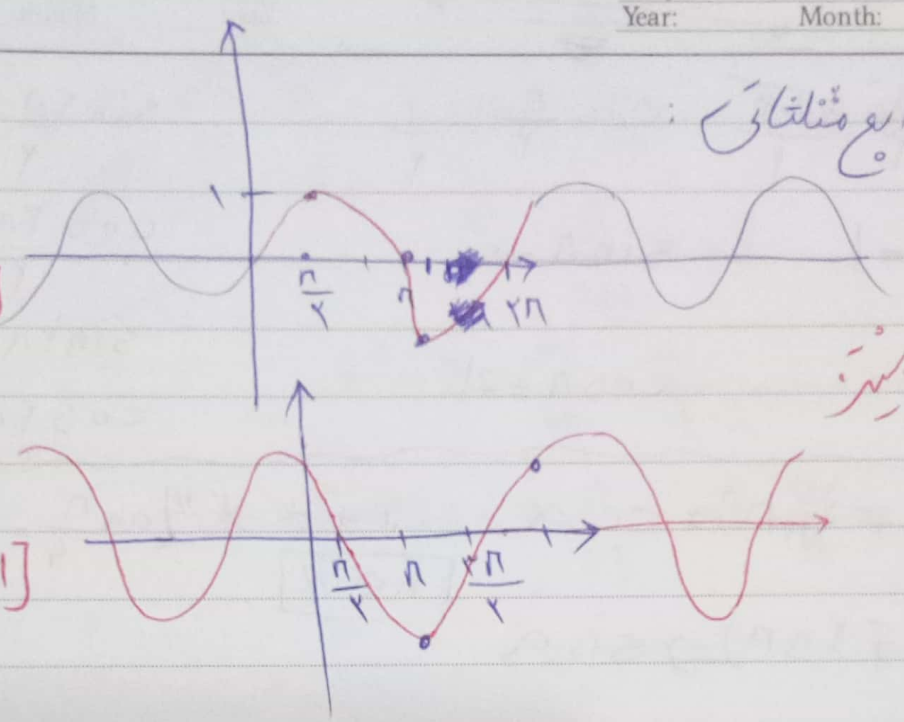
* $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ *

* رسم توابع مثلثاتی :

$y = \sin x$

$D = R$

$R = [-1, 1]$



یک به یک نیست

*

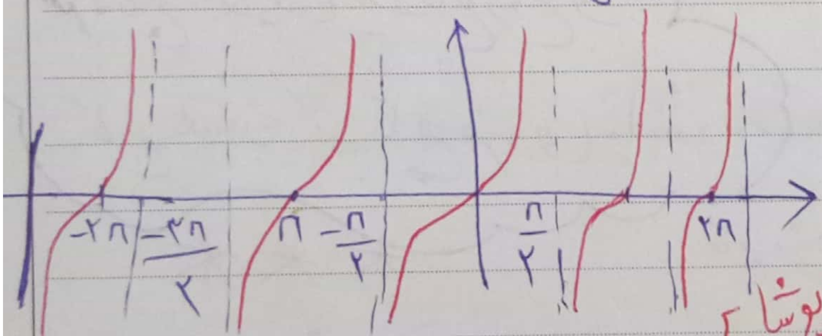
$y = \cos x$

$D = R$

$R = [-1, 1]$

$y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\quad D_{\tan} = R - \{x : \cos x = 0\}$

$R - \{x : x = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$

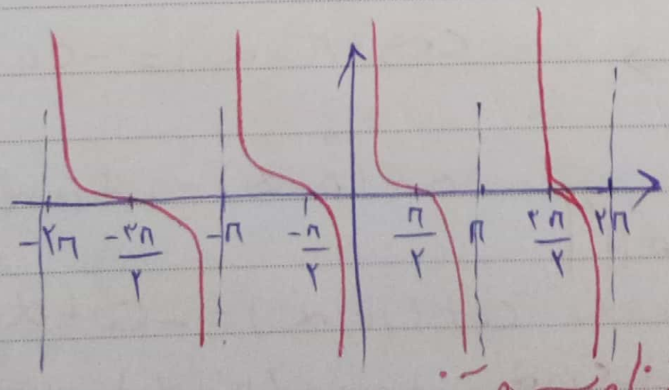


* * * * * *

یک به یک نمی باشد

[پوشا]

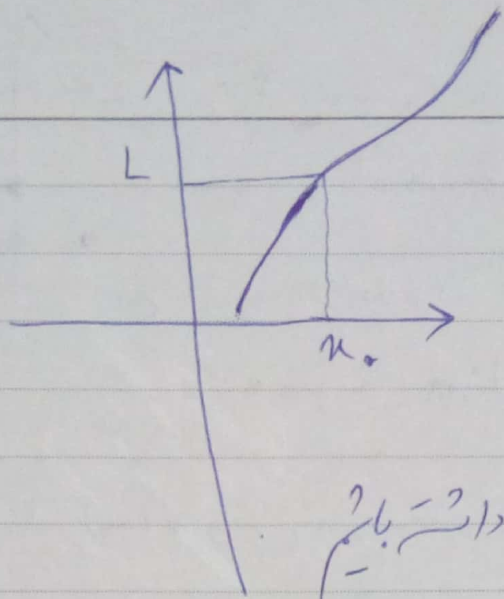
$y = \cot x \Rightarrow \dfrac{\cos x}{\sin x}$ $\quad D = R - \{x : \sin x = 0\} = R - \{x : x = k\pi\}$



یک به یک نیست

[پوشا است]

* همه توابع مثلثاتی متناوب هستند.



حد و پیوستگی:

تعریف حد: فرض کنیم یک همسایگی محذوف $(x \in D_f)$ اطراف x_0 ها داشته باشیم

آنگاه حد تابع f وقتی $x \to x_0$ می‌رود مقدار L است و $\lim f(x)=L$

قضیه 1: حد تابع همانی $f(x)=x$ وقتی $x \to x_0$

$\lim_{x \to x_0} x = x_0$

قضیه 2: حد تابع خطی $f(x)=ax+b$ $(a,b \in R)$ وقتی $x \to x$: $\lim ax+b = ax_0+b$

$\lim_{x \to x} c = c$

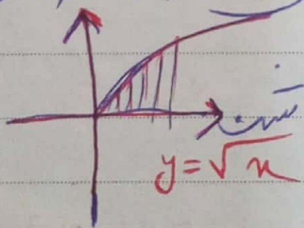
قضیه 3: حد تابع $f(x)=c$

$\lim_{x \to 1,\dots} ۸ \Rightarrow ۸$

نکته: حد تابع $f(x)$ وقتی $x \to x_0$ زمانی معنی دارد که همسایگی اطراف x_0 تعریف شده باشد

$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} \Rightarrow$ وجود ندارد

دامنه $D_{\sqrt{x}} \Rightarrow [0,+\infty)$



حد راست و حد چپ

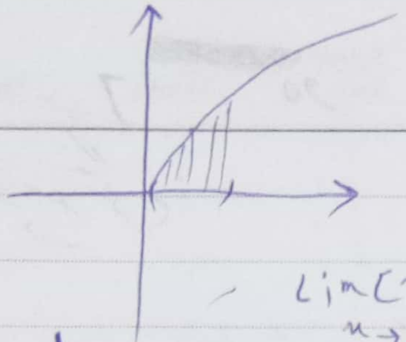
حد راست: هرگاه برای تابع f بازه‌ی (x_0, b) وجود داشته باشد آنگاه

گوییم f از سمت راست دارای حد L می‌باشد و می‌نویسیم $\lim_{x \to x^+} f(x) = L$

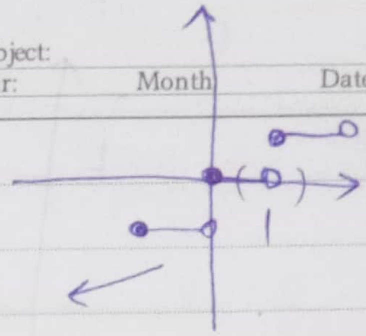
حد چپ: هرگاه برای تابع f بازه‌ی (a, x_0) وجود داشته باشد

آنگاه گوییم f از سمت چپ دارای حد L می‌باشد و می‌نویسیم

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$



$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$



$\lim_{x\to 0^-}[x] =$ وجود ندارد

$\lim_{x\to 1^+}[x]=1$ $\qquad$ $\lim_{x\to 1^-}[x]=0$

قضیه مهم: تابع $f(x)$ وقتی $x\to x_0$ می‌رود دارای حد L می‌باشد

هرگاه حد چپ و حد راست مقدار L داشته باشد

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$$

مثال: $\lim_{x\to 2^+} \frac{[x]-1}{x-1} = \frac{2-1}{2-1} = 1$ حد وجود ندارد

$\lim_{x\to 2^-} \frac{[x]-1}{x-1} \Rightarrow \frac{1-1}{2-1} \Rightarrow 0$ $\qquad$ $[2^-] \Rightarrow 1$

مثال: حد تابع را بدست آورید.

$\lim_{x\to 3}[x]+[4-x] \Rightarrow 3$ حد وجود دارد

حد راست $x\to 3^+$ $\Rightarrow [x]+4+[-x] = 3+4+(-4) = 3$

حد چپ $x\to 3^-$ $\Rightarrow [x]+4+[-x] \Rightarrow 2+4-3 = 3$

جبر روی حد: (اعمال روی حد)

g

قضیه: فرض کنیم $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ $\qquad$ $\lim_{x\to x_0} g(x)=M$

بنابراین $\Rightarrow$ الف) $\lim f(x)\mp g(x) = L\mp M$


SHAFAGH
THE GREATEST PRODUCER

اعمال روی حد ضرب

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = \left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) \Rightarrow M\cdot L$$

ج) $$\lim_{x\to x_0}(f(x))^n = \left(\lim_{x\to 0} f(x)\right)^n = L^n$$

د) $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{L}{M} , \quad M\neq 0$$

ه) $$\lim_{x\to 0}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

* نکته: اگر $L>0$ باشد شرط $n\in N$ و اگر $L<0$ باشد $n\in Z$

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x+1} \Rightarrow \lim\sqrt{0+1} = 1$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{3}}\sqrt[2]{2x-1} \Rightarrow$$

نکته) وقتی زیر رادیکال صفر شد حد وجود ندارد.

قضیه: تابع چند جمله‌ای $f(x)=a_0+a_1x+\dots a_nx^n$ در هر نقطه‌ای $x_0\in R$ دارای حدی باشد:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a_0+a_1x_0+\dots+a_nx_0^n$$

$$\lim_{x\to 1} x^3-2x+5 \Rightarrow 4$$

تذکر: فرض کنیم که حد $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ و $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$ آنگاه $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ را نمی‌توان با توجه به قسمت (د) قضیه اعمال جبری حل کرد ... ←

SHAFAGH

Subject:
Year: Month: Date:

باید با استفاده از اتحاد، مزدوج و سایر روش‌های ریاضی معادل کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ را بدست آورده و سپس حد آن را حساب می‌کنیم

$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{0}{0}$ مبهم

$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} \Rightarrow 1+1=2$

$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^3+1} = \frac{(-1)-1}{(-1)^3+1} = \frac{0}{0}$ مبهم

$\Rightarrow \lim \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x^2-x+1} = \frac{-1-1}{(-1)^2+1+1} = \frac{-2}{3}$

$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{4}$ **

حد توابع مثلثاتی...

① $\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$

② $\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$

③ $\lim_{x\to x_0} \tan x = \tan x$

$(x_0 \neq k\pi + \frac{\pi}{2})$ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

④ $\lim_{x\to x_0} \cot x \Rightarrow \cot x_0$ $(x_0 \neq k\pi)$

$\boxed{\sin x \neq 0}$

$\cot = \frac{\cos x}{\sin x}$

SHAFAGH

Scanned by CamScanner

Subject:
Year: Month: Date:

قضیه فشردگی (ساندویچ): فرض کنیم به ازای هر x در همسایگی نقطه x_0 (به جز احتمالاً خود x_0) داشته باشیم

$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ اگر $\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L$

آنگاه $\Leftarrow \lim f(x) = L$

مثال: $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} =$

$-1 \leq \sin \alpha \leq 1$

$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ فرض

ضرب در x: $-x \leq x\sin \frac{1}{x} \leq x$

$\lim_{x \to 0} -x = 0 = \lim_{x \to 0} x \Rightarrow$ بنابراین $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

$\lim_{x \to 0} x[\frac{1}{x}]$ حل با قضیه فشردگی

$\boxed{\frac{عدد}{0} = \infty}$

$\times x \rightarrow (\frac{1}{x} - 1 < [\frac{1}{x}] \leq \frac{1}{x}) \rightarrow$ از خاصیت های جزء صحیح

$1 - x < x[\frac{1}{x}] \leq 1$ $\quad \lim_{x \to 0} 1 - x = 1 = \lim_{x \to 0} 1 = 1$

پس $\Rightarrow \lim_{x \to 0} x[\frac{1}{x}] = 1$

قضیه: فرض کنیم به ازای هر x (x بر حسب رادیان)

$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ ، آنگاه $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$

① $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

نتیجه: $\begin{cases} \lim_{x \to 0} \cos x = 1 \\ \lim_{x \to 0} 1 = 1 \end{cases} \rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ***

② $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \frac{\sin x}{\cos x}\times\frac{1}{x} = \lim\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x}$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim\frac{1}{\cos x}\right) = 1$$

مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim\frac{\overset{\sin^2 x}{\cancel{1-\cos^2 x}}}{x(1+\cos x)} =$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\times\sin x}{x(1+\cos x)} = \lim\frac{\sin x}{x}\times\frac{\sin x}{1+\cos x} = 1\times 0 = 0$$

مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x} \Rightarrow \lim\frac{\sin 3x\times\frac{3x}{3x}}{\sin 2x\times\frac{2x}{2x}} =$

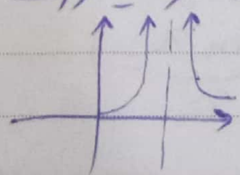
$$\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\times 3x}{\frac{\sin 2x}{2x}\times 2x} \Rightarrow \frac{3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}} \Rightarrow \frac{3}{2}$$

قضیه: (1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$, (2) $\lim\frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$

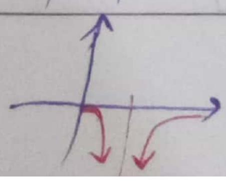
حد بینهایت:

نکته: علامت‌های $\mp\infty$ عدد نیستند و در واقع رفتار تابع در اطراف a را نشان می‌دهند. در اینصورت حد تابع موجود نیست *****

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x-x)^2} = +\infty$$



$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x-x)^2} = -\infty$$



SHAFAGH

Subject:
Year: ۹۰ Month: ۸ Date: ۷

قضیه: فرض کنیم $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ و $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$ آنگاه برای $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ حالت زیر وجود دارد:

الف- اگر $L>0$ و $g(x)$ با مقدار مثبت به صفر میل کند $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

ب- اگر $L>0$ و $g(x)$ " منفی " " " " " $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

پ- اگر $L<0$ و $g(x)$ با مقدار مثبت به صفر میل کند $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

ت. اگر $L<0$ و $g(x)$ " " منفی " " " " $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

حد های بی نهایت:

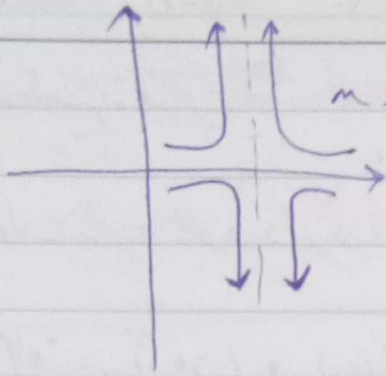
$$\lim_{x\to 3} [x]+[4-x]$$

$$\lim_{x\to 3^+} [x]+[4-x] = \lim [x]+4+[-x]$$

$$=3+4-4=3$$

$$\lim_{x\to 3^-} [x]+4+[-x]=2+4-3=3 \checkmark$$

حدبی نهایت :



$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

مثال: $\lim_{x\to 2^-} \frac{[x]-x}{2-x} = \frac{1-2}{0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} \Rightarrow \frac{1}{0^+} \Rightarrow +\infty$

قضیه: فرض کنیم $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to x_0} g(x)=c$

$\lim_{x\to x_0} g(x)+f(x)=+\infty$

فرض کنیم ← $\lim_{x\to x_0} g(x)=c$, $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$

بنابراین $\Rightarrow \lim f(x)+g(x)=-\infty$ ***

مثال: $\lim_{x\to 2^-} \frac{5}{x-2}+\frac{1}{x+1}=\frac{5}{0^-}+\frac{1}{3}=-\infty+\frac{1}{3}=-\infty$

فرض کنیم: $\lim_{x\to x_0} g(x)=c$, $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$

پس الف) اگر $c>0$: $\lim_{x\to x_0} g(x)\cdot f(x)=+\infty$

ب) اگر $c<0$: $\lim_{x\to x_0} g(x)\cdot f(x)=-\infty$

قضیه. اگر $\lim_{x\to x_0} g(x)=c$, $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$

الف) $c>0$: $\lim g(x) f(x)=-\infty$

ب) $c<0$: $\lim g(x) f(x)=+\infty$

1

از هر بینهایت عدد مثبتی بزرگتر شود

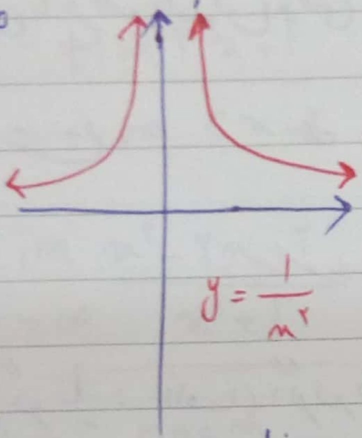
حد در بینهایت: فرض کنیم در تابع $f(x)$ برای x های به اندازه کافی بزرگ داشته باشیم $|f(x)-L|$ از هر عدد مثبتی کوچکتر باشد، آنگاه گوییم تابع $f(x)$ وقتی $x \to +\infty$ میل می‌کند به سمت L میل می‌کند و می‌نویسیم. $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$



$y = \frac{1}{x^2}$

قضیه: فرض کنیم a (عددی) ثابت و n عدد صحیح مثبت باشد.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{a}{x^n} = 0$$

مثال $= \lim_{x\to-\infty} \frac{-4}{x^5} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

حد بینهایت در بینهایت: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ یعنی با افزایش x به ازای مقادیر مثبت، $f(x)$ به طور نامتناهی افزایش یابد و از هر عدد مثبتی بزرگتر شود.

قضیه: فرض $a>0$ و $n \in \mathbb{N}$ *

$$\lim_{x\to+\infty} a x^n = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} a x^n \Rightarrow \begin{cases} +\infty & n \text{ زوج} \\ -\infty & n \text{ فرد} \end{cases}$$

قضیه: فرض $a<0$ و $n \in \mathbb{N}$ *

$$\lim_{x\to+\infty} a x^n = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} a x^n = \begin{cases} -\infty & n \text{ زوج} \\ +\infty & n \text{ فرد} \end{cases}$$

Subject:
Year: Month: Date:

مثال:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^5=-\infty$$

فاکتور

$$\lim_{x\to+\infty} x^3-2x+1=\lim x^3\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$$

* برای تابع چند جمله‌ای وقتی $x\to\pm\infty$ می‌رود حد تابع برابر با حد عباراتی که دارای بزرگترین درجه است.

*** $$\lim_{x\to-\infty} x^4-3x^2+1=\lim_{x\to-\infty} x^4=+\infty$$

✓ $$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x^3+1}\Rightarrow 0$$ درجه صورت کوچکتر از درجه مخرج است

در تابع گویا: الف) اگر درجه مخرج از درجه صورت بزرگتر باشد حد تابع صفر است

ب) اگر صورت و مخرج هم درجه باشند آنگاه حد تابع برابر است با خارج قسمت ضریب بزرگترین درجه صورت و ضریب بزرگترین درجه مخرج.

ج) اگر درجه صورت از درجه مخرج بزرگتر باشد آنگاه حد برابر ∞ است.

* فرض کنیم:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$$

$$g(x)=b_0+b_1x+\dots+b_mx^m$$

$$\lim_{x\to\mp\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{a_0+\dots+a_nx^n}{b_0+\dots+b_mx^m}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

$$\begin{cases}\lim \dfrac{a_n}{b_mx^k}=0 & m>n \\ \dfrac{a_n}{b_m} & m=n \\ \lim \dfrac{a_n}{b_m}x^{k}=\infty \quad k>0 & m<n\end{cases}$$

SHAFAGH

Year: Month: Date:

* اختلاف توانها

$$m<n \begin{cases} \frac{a_n}{a_m}>0 \text{ فرد } \to -\infty \\ \frac{a_n}{a_m}>0 \text{ زوج } \to +\infty \\ \frac{a_n}{a_m}<0 \text{ زوج } \to -\infty \\ \frac{a_n}{a_m}<0 \text{ فرد } \to +\infty \end{cases}$$

مثال $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{4x-2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

مثال $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+2}{x^2+1} = 1$ $\qquad$ * $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty$ $\qquad \frac{x^2}{x} = x$

مثال: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ $\qquad -1 \leq \cos x \leq 1$

$$\frac{-1}{x} < \frac{\cos x}{x} < \frac{1}{x} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ر: قضیه فشردگی برای حدود بینهایت قابل قبول است.

نکته: در محاسبه حدود بینهایت گاهی حالتی همچون $\infty-\infty$ یا $\infty\times 0$ و $\frac{\infty}{\infty}$ پیش می آید که همگی حالات مبهم هستند. برای محاسبه حد باید از روش های تجزیه، فاکتورگیری، ضرب و تقسیم و سایر روش های ریاضی معادل تابع را به دست آورده و آنگاه حد را محاسبه کنیم...

مثال: "مبهم $-\infty+\infty$"

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x} - x \times \frac{\sqrt{x^2+3x}+x}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim \frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \text{"mistake"}$$

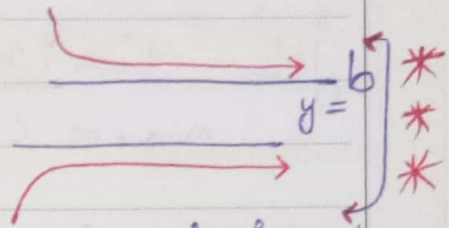
SHAFAGH

مجانب قائم و افقی:

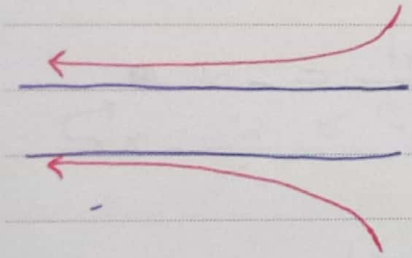
مجانب افقی: خط $y=b$ را مجانب افقی گوییم هرگاه یکی از حالت‌های زیر اتفاق افتد.

الف) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=b \quad (f(x)\neq b)$

ب) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b \quad (f(x)\neq b)$



$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$



$\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$

مثال: $y=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}=\lim|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\cancel{x}(1-\frac{1}{x})}=1 \qquad y=1$$

مجانب افقی

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}\Rightarrow\lim\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x(1-\frac{1}{x})}=\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x(1-\frac{1}{x})}=-1 \qquad y=-1$$

«همیشه در مجانب افقی حد چپ و راست را به دست می‌آوریم.»

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ مجانب افقی $y=0$

مجانب قائم: خط $x=a$، مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گوییم هرگاه یکی از حالات زیر اتفاق بیفتد.

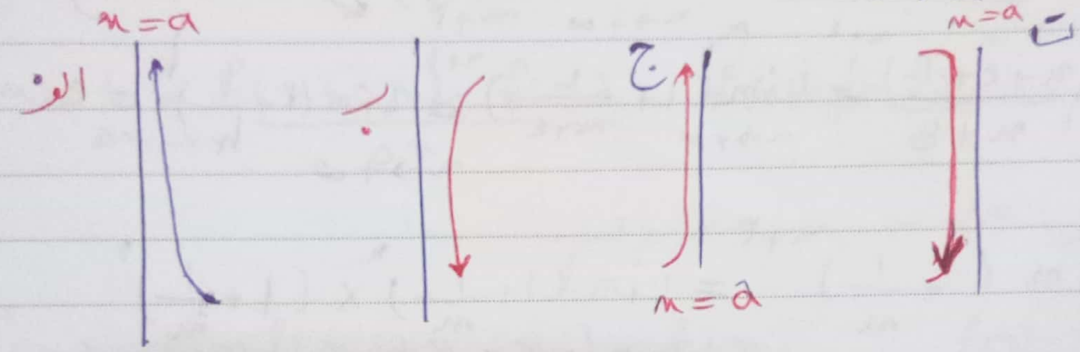
Subject:
Year: Month: Date:

الف) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

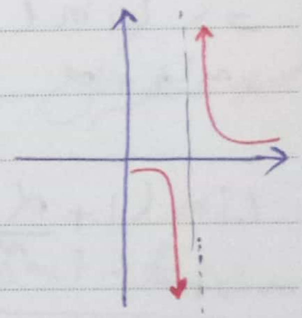
ب) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

د) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$



مثال: مجانب قائم تابع را به دست آورید. $y=\dfrac{1}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$



نکته: در تابع کسری $f(x)$، ریشه های مخرج می توانند کاندیدی برای مجانب قائم باشند. پس مخرج را برابر صفر قرار داده و معادله را حل می کنیم. جواب معادله مجانب های قائم تابع خواهد بود... به شرطی که ریشه های مخرج صورت را صفر نکند...

مثال: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ $\boxed{x-2=2}$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$

مجانب قائم ندارد.

$e = ۲٫۷۱۸ ...$

Subject:
Year: Month: Date:

قضیه: «عدد نپر»

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

$$\lim_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}}=e$$

مثال ⇐ $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+5}{n+4}\right)^{n+4}$ $\boxed{n+4=h}$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+4+1}{n+4}\right)^{n+4}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+4}\right)^{n+4}=\lim_{h\to+\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^{h}=e$$

مثال $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+3}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\times\lim\cancel{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3}}=e$$

قضیه:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\beta n}=e^{\alpha\beta}$$

$$\lim\left(1+\alpha n\right)^{\frac{\beta}{n}}=e^{\alpha\beta}$$

مثال $\lim_{n\to 0}\sqrt[n]{1-2n}=\lim_{n\to 0}(1-2n)^{\frac{1}{n}}=e^{-2}$

$$(1+(-2)n)^{\frac{1}{n}}$$

مثال: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{1+n}\right)^{n}\overset{\text{معکوس یا کلی}}{\Rightarrow}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^{-n}=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=e^{-1}$

SHAFAGH

Subject:
Year: Month: Date:

مشتق: «فصل ۳»

تعریف: فرض کنیم برای تابع $y=f(x)$، $x=x_0$ تعریف شده باشد ← $(x_0 \in D_f)$

آنگاه مشتق تابع در نقطه‌ی $x=x_0$ با نماد $f'(x)$ نشان داده و به صورت زیر

تعریف می‌کنیم.

$$f'(x)=y'=\frac{dy}{dx} \qquad f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

اگر به جای Δx ← $x-x_0$ قرار دهیم.

$$f'(x)=\lim_{x-x_0\to 0}\frac{f(x_0+x-x_0)-f(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

* مشتق کلی ← $x\in D_f$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

مثال $f(x)=2x^2+2$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\frac{2(x+\Delta x)^2+2-2x^2-2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{2x^2}+4x\Delta x+\Delta x^2\cancel{+2}\cancel{-2x^2}\cancel{-2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{\Delta x}(4x+2\Delta x)}{\cancel{\Delta x}}=\lim_{\Delta x\to 0}4x+2\Delta x=\boxed{4x}$$

مشتق راست $f'_+(x_0)=\displaystyle\lim_{\Delta x\to x_0^+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

مشتق چپ $f'_-(x_0)=\displaystyle\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ یا $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

SHAFAGH

قضیه: اگر تابعی در یک نقطه مشتق پذیر باشد حتماً پیوسته است اما برعکس این قضیه صحیح نمی باشد مانند تابع قدر مطلق

$f(x)=|x| \qquad f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|-0}{x}$

$f'_+(0)=\lim \frac{|x|}{x}=\lim\frac{x}{x}=1$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$

نکته: عکس نقیض: اگر تابعی در نقطه ای پیوسته نباشد پس در آن نقطه مشتق پذیر نیست.

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

این تابع در نقطه ۰ = ناپیوسته میباشد پس در این نقطه مشتق پذیر نمی باشد

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x<1 \\ ax+b & x\geq 1 \end{cases}$$

a و b را طوری بدست آورید که $f'(1)$ وجود داشته باشد.

$f'_+(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{a(x+\Delta x)+b-ax-b}{\Delta x}$

$=\lim\frac{\cancel{ax}+a\cancel{\Delta x}+\cancel{b}-\cancel{ax}-\cancel{b}}{\cancel{\Delta x}}=a$

$f'_-(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$

$f'_-(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{\cancel{x^2}+2x\Delta x+\Delta x^2-\cancel{x^2}}{\Delta x}=2x=2(1)=2.$

$\Rightarrow$ $\boxed{a=۲}$ از رابطه ۱ و ۲ نتیجه می شود

$b=?$ $\lim_{x\to 1^-} x^۲ = \lim_{x\to 1^+} ۲x+b \Rightarrow 1 = ۲+b$ $\boxed{b=-1}$

قضایای مشتق:

1. $f(x)=c$ $f'(x)=0$ ثابت c

2. $f(x)=x$ $f'(x)=1$

3- $g(x)=cf(x)$ $g'(x)=(cf(x))'=cf'(x)$

$y=۵x$ $y'=۵(x)'=۵\times 1=۵$ ✓

4. $f(x)=x^r$ $f'(x)=rx^{r-1}$ $r\in Q \to$ اعداد حقیقی

$y=\sqrt[۴]{x^۳}$ $y=x^{\frac{۳}{۴}}$ $y'=\frac{۳}{۴}x^{\frac{۳}{۴}-1}=\frac{۳}{۴}x^{\frac{-1}{۴}}=\frac{۳}{۴}\frac{1}{\sqrt[۴]{x}}$

5- $f(x)=\sqrt[n]{x^m} \Rightarrow f'(x)=\frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$ [(* * *)]

۶) $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$ f' و g' موجود باشد

۷) $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$ ....

$y=x^۲\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \Rightarrow y'=۲x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+(x^۲)\left(\frac{-1}{۲\sqrt{x}}\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{}}=x^{\frac{-1}{۲}} \Rightarrow \frac{-1}{۲}x^{\frac{-1}{۲}-1}=\frac{-1}{۲}x^{\frac{-۳}{2}}$

Subject:
Year: Month: Date:

*** قضایای مشتق:

تقسیم $\Rightarrow \frac{u'v - v'u}{v^2}$ $\qquad y=\frac{x^2}{\sqrt{x}}$

$$y' \Rightarrow \frac{2x(\sqrt{x}) - \frac{x^2}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$y=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2x^2-1} = y' \Rightarrow \frac{\left(\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\right)(2x^2-1) - 4(x)(\sqrt[3]{x^2})}{(2x^2-1)^2}$$

$$x^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} \Rightarrow \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

عبارات مشکل: $y=f(u)$ و $u=g(x)$

حالت [illegible]: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$

تعریف قاعده زنجیره‌ای:

فرض کنیم $y=f(u)$ تابعی از متغیر u و u هم تابعی از متغیر x باشد مانند $u=g(x)$

بنابراین $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}=\frac{du}{dx}$

مشتق توابع مرکب:

$$(fog)'(x) = f(g(x))' \Rightarrow f'(g(x))\times g'(x)$$

مثال: $y=\sqrt{1+\sqrt{1+x}} \Rightarrow y=\sqrt{u} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{u}}\times u'$

$\Rightarrow u' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ $\qquad \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}\times\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$

Subject:
Year: Month: Date:

$y=f(u)$

$u=g(v)$

$v=(h)$

$h=k(x)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df}{du}\times\frac{du}{dv}\times\frac{dv}{dh}\times\frac{dh}{dx}$$

$\Rightarrow$ مثال $= y=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{x}}}}$

$= y=\sqrt{u} \quad u=3+\sqrt{3+\sqrt{x}}$

$u=3+\sqrt{v} \qquad v=3+\sqrt{3+\sqrt{x}}$

$h=3+\sqrt{w}$ ، $w=3+\sqrt{x}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\times\frac{1}{2\sqrt{v}}\times\frac{1}{2\sqrt{h}}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{x}}}}}\times\frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{x}}}}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{x}}}$$

① $y=u^2 \quad u=g(x) \qquad y'=2u^{2-1}\times u'$

② $y=\sqrt[n]{u^m}\longrightarrow y'=\dfrac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$

مثال: $y=\sqrt[3]{(x^2+3)}\,(7x^4-2x)^6$ $\boxed{u'v+v'u}$ ضرب

$$y'=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+3)^2}}(7x^4-2x)^6+\sqrt[3]{(x^2+3)}\left((28x^3-2)\times 6(7x^4-2x)^5\right)$$

SHAFAGH

قواعد مشتق گیری

$(3): y=|u| \quad u\neq 0$

$y'=\frac{u}{|u|}u'$ مشتق قدر مطلق

$y=\sin x \quad y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$\sin a-\sin b=2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{x+\Delta x-x}{2}\right)\cos\left(\frac{x+\Delta x+x}{2}\right)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}\times\lim$

$\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x$

$y=\sin x \xrightarrow{\text{پس}} y'=\cos x$

$y=\cos x \longrightarrow y'=-\sin x$

$y=\tan x \longrightarrow y'=\frac{1}{\cos^2 x}$ یا $y'=1+\tan^2 x$

$y=\cot x \to y'=\frac{-1}{\sin^2 x}$ or $y'=(1+\cot^2 x)$

$* \; y=\cot u \Rightarrow y'=-u'(1+\cot^2 u)$

SHAFAGH

مشتق توابع مثلثاتی:

$y=\tan u \to y'=u'(1+\tan^2 u)$

$y=\cos u \to y'=-u'\sin u$

$y=\sin u \to y'=u'\cos u$

مثال $y=\tan(\underbrace{\sin x}_{u}) \to y'=\cos x(1+\tan^2(\sin x))$

مثال $y=x\sin^3 x^2$ $y'=\sin^3 x^2+x\times$ قاعده زنجیره ای

$v=\sin^3 x^2$ $x^2=u \Rightarrow w=\sin u$ $v=w^3$

$\frac{dv}{dx}=\frac{dv}{dw}\times\frac{dw}{du}\times\frac{du}{dx}=3w^2\times(\cos u)\times(2x)=$

$=3(\sin^2 x^2)\times\cos(x^2)\times(2x)$

$\boxed{\text{فرمول}=\sin^n u=(n\sin^{n-1}u)(u'\cos u)}$

$y=f(x) \longrightarrow y'=f'(x)$

$y''=f''(x)$ $y'''=f'''(x)$ $y^{(n)}=f^{(n)}(n)$

$y=\sqrt{x}$ $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ $y''=$

$=\frac{1}{2}\times(\frac{-1}{2})(x^{-\frac{1}{2}-1})=\frac{-1}{4}x^{-\frac{3}{2}}=\frac{-1}{4\sqrt{x^3}}$

SHAFAGH

$y'''=\frac{-1}{4}\times(\frac{-3}{2})\times x^{-\frac{3}{2}-1} \Rightarrow \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$

Scanned by CamScanner

Subject:
Year: Month: Date:

مشتق:

مثال. $y=\frac{1}{x}$ $\quad y'=\frac{-1}{x^2}$ $\quad y''=\frac{-1\times(2x)}{x^4}=\frac{2}{x^3}$

$y'''=\frac{2\times(-3x^2)}{x^6}=\frac{-6}{x^4}$ $\rightarrow 1\times2\times3$ $\Rightarrow y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

مشتق‌گیری ضمنی:

$F(x,y)=c$, $F(x,y)=0$

$y=x^2+y^2=1 \longrightarrow x^2+y^2-1=0 = 2x+2yy'=0$

$\Rightarrow 2yy'=-2x$ $\quad y'=\frac{-2x}{2y}=\frac{-x}{y}$

راه حل ساده‌تر $\Rightarrow$ $y'=\frac{-F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$ $\quad$ (-1) × مشتق عبارت نسبت به x / مشتق عبارت نسبت به y

$y'=\frac{-2x}{2y}=\frac{-x}{y}$ ***

$y=y^3+2xy^2-5xy+4=0$ $\quad y'=\frac{-(2y^2-5y)}{3y^2+4xy-5x}$

مشتق توابع نمایی و لگاریتمی:

$y=\ln x \Rightarrow y'=\frac{1}{x}$ * $y=\ln u \longrightarrow y'=\frac{u'}{u}$

$y=\log_a^x=\frac{\ln x}{\ln a}$ $\quad \frac{1}{\ln a}=\log_a^e$ $\quad \log_e^a$

$\Rightarrow \ln x\times\log_a^e$ $\quad y'=\frac{1}{x}\times\log_a^e$

عدد ثابت

SHAFAGH

مشتق

Subject:
Year: Month: Date:

نکته: یکی از مهمترین کاربردهای تابع لگاریتمی طبیعی، مشتق گیری است.

$$y = a^x \Rightarrow \ln y = \ln a^x \Rightarrow \ln y = x \ln a^x$$

$$\Rightarrow \ln y = \underbrace{x \ln a}_{\text{عدد ثابت}} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{\ln a}{1}$$

① $y = a^x \Rightarrow y' = a^x \ln a \quad , \quad y = a^u = u' a^u \ln a$

② $y = e^x \Rightarrow y' = e^x \quad , \quad y = e^u \Rightarrow y' = u' e^u$ ***

مثال
$$y = \frac{(2x-1)^{\frac{5}{2}}(x^2+2x)^7}{(x^3-1)^6 (7x^4+2x^2)^{\frac{1}{4}}}$$

$$\ln y = \ln (2x-1)^{\frac{5}{2}}(x^2+2x)^7 - \ln\left((x^3-1)^6 (7x^4+2x^2)^{\frac{1}{4}}\right)$$

$$\ln y = \ln(2x-1)^{\frac{5}{2}} + \ln(x^2+2x)^7 - \ln(x^3-1)^6 - \ln(7x^4+2x^2)^{\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{\frac{5}{2}(2)(2x-1)^{\frac{3}{2}}}{(2x-1)^{\frac{5}{2}}} + \frac{7(2x+2)(x^2+2x)^6}{(x^2+2x)^7}$$

$$\frac{6(3x^2)(x^3-1)^5}{(x^3-1)^6} - \frac{1}{4}\frac{(28x^3+4x)(7x^2+2x)}{(7x^4+2x^2)^{\frac{1}{4}}}$$

The end

Subject:
Year: Month: Date:

مشتق:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

مشتق در یک نقطه.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0) \qquad \boxed{\Delta x=x-x_0}$$

$$y=(\cos x)^{\sin x} \Rightarrow \ln(\cos x)^{\sin x}=\ln y=\sin x\ln\cos x$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y}=\cos x\ln\cos x+(\sin x)\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)=$$

$$\cos x\ln\cos x-\tan x\sin x$$

$$\Rightarrow y'=(\cos x)^{\sin x}\left(\cos x\ln\cos x-\tan x\sin x\right)$$

نکته: برای مشتق گیری توابع توانی، می توان از Ln استفاده کرد.

«از طرفین Ln می گیریم و بعد مشتق را حساب می کنیم»

دامنه توابع را بیابید

$$y=\sqrt{|2x-1|-3}$$

$$|2x-1|-3\geq 0 \qquad |2x-1|\geq 3 \;,\; |2x-1|\leq -3$$

۹۰ ـــ

SHAFAGH

$$y=\frac{1}{\sqrt[3]{x-[x]}} \qquad x-[x]>0 \qquad x-1<[x]\leq x \Rightarrow x-[x]\geq 0$$

$$\boxed{D=R-Z}$$

Subject:
Year: Month: Date:

مشتق توابع معکوس مثلثاتی:

$$y = \operatorname{Arc}\sin x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x|<1 \Rightarrow -1<U<1$$

$$y = \operatorname{Arc}\sin U \Rightarrow y' = \frac{U'}{\sqrt{1-U^2}} \quad *** \quad |U|<1$$

$$y = \operatorname{Arc}\cos U \Rightarrow y' = \frac{-U'}{\sqrt{1-U^2}}$$

$$y = \operatorname{Arc}\tan U \Rightarrow y' = \frac{U'}{1+U^2} \quad U \in (-\infty, \infty)$$

$$y = \operatorname{Arc}\cot U \Rightarrow y' = \frac{-U'}{1+U^2} \quad ***$$

مثال:

$$y = \operatorname{Arc}\cot(\underbrace{\sin x}_{U})$$

$$y' = \frac{-\cos x}{1+(\sin^2 x)}$$

$$y = \operatorname{Arc}\tan(\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{U})$$

$$y' = \frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{1+x^2}{x^2}} = \frac{-1}{1+x^2} \quad ***$$

$$y = \operatorname{Ln}(\operatorname{Arc}(\sin x)$$

$$y' = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{\operatorname{Arc}(\sin x)}{1}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}\,(\operatorname{Arc}(\sin x)}, \ldots$$

SHAFAGH

دیفرانسیل :

$$\frac{f'(x)}{1} \cong \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \Delta y \cong f'(x)\,\Delta x$$

$$\Rightarrow f(x+\Delta x) \cong f'(x)\Delta x \Rightarrow \boxed{f(x+\Delta x) \cong f'(x)\Delta x + f(x)}$$

$$* \quad f(x_0+\Delta x) \cong f'(x_0)\Delta x + f(x_0)$$

مثال : $\sqrt{10}$ $\qquad y=\sqrt{x} = \sqrt{\underbrace{9}_{x}+\underbrace{1}_{\Delta x}}$

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad \boxed{\begin{matrix} x=9 \\ \Delta x=1 \end{matrix}}$

$$\cong \frac{1}{2\sqrt{9}} \times 1 + \sqrt{9} \cong \frac{1}{2\times 3} + 3 \cong 3 + \frac{1}{6} \cong \frac{19}{6}$$

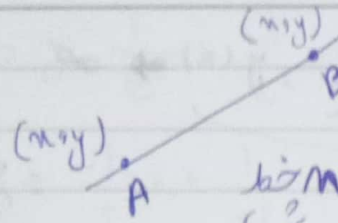
$\sqrt[3]{26}$ $\qquad y=\sqrt[3]{x} = \sqrt{\underbrace{27}_{x_0}\underbrace{-1}_{\Delta x}}$

براساس فرمول: $f(x_0+\Delta x) \cong f'(x_0)\Delta x + f(x_0)$ $\qquad \sqrt[3]{27}=3$

مشتق تابع $= y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \longrightarrow f'(x_0) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(27)^2}} = \dfrac{1}{27}$

$$\sqrt[3]{26} \cong \frac{1}{27} + (-1) + 3 = \frac{-1}{27} + \frac{3}{1} = \frac{-1+(81)}{27} = \frac{80}{27}$$

فصل ۴ - کاربرد مشتق:



* معادله خط مماس و قائم بر منحنی:

شیب خط $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

شیب خط مماس بر نقطه a $= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

تعریف: فرض کنیم تابع $y=f(x)$ بر نقطه $x=a$ تعریف شده و پیوسته باشد و $y=f(x)$ در همسایگی باز از نقطه $x=a$ مشتق پذیر باشد. بنابراین، شیب خط مماس بر نقطه $(a, f(a))$ برابر است با $f'(a)$ و $\boxed{\text{معادله خط مماس}}$ بر نقطه

$$y - f(a) = f'(a)(x-a) \quad *** \quad \Leftarrow a, f(a)$$

مثال $\Rightarrow y = x^2+2x-2$ $\boxed{x=1}$

$f'(x) = 2x+2 \xRightarrow{y'(1)} 2(1)+2 = 4 \qquad y(1) = (1)^2+2(1)-2 = 1$

نقطه $= (1,1) \qquad y-1 = 4(x-1) \Rightarrow y-1 = 4x-4$

$y = 4x-4+1 \Rightarrow \boxed{y = 4x-3}$

مثال $= y = \sqrt{2x^2+1}$ $\boxed{x=2}$

$y' = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}} \qquad y'(2) = \frac{4}{2\sqrt{2(2)^2+1}} = \frac{4}{3}$

$y \Rightarrow 3$ نقطه $(2,3)$

$y-3 = \frac{4}{3}(x-2) \Rightarrow y-3 = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} = \boxed{y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}} \Rightarrow 3y = 4x+1$

Subject:
Year: ۹۰ Month: Date:

مثال: $y=\sqrt{x}$ $\quad x=0$ $\quad y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad y'(0)\to\infty$

پس معادله خط مماس برابر است با $\boxed{x=0}$

نکته:

"گاهی اوقات پیش می‌آید که شیب خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه $x=a$ برابر $\mp\infty$ می‌شود که در این حالت خط مماس بر منحنی موازی محور yها و عمود بر محور xها است و معادله خط مماس برابر $x=a$ می‌باشد.

نکته ۱. اگر حالتی پیش آید که شیب خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه $x=a$ برابر صفر شود ($m(a)=0$) بنابراین معادله خط مماس $y=f(a)$ است و خط مماس بر منحنی موازی محور xها است.

$y=x^2 \Rightarrow y'=2x \ , \ y'(0)=0$ درنتیجه

$\boxed{x=0}$

$y=f(a) \Rightarrow (0)^2=0$ $\quad \boxed{y=0}$

شیب خط مماس بر منحنی در نقطه $(0,0)$ «***»

$y=\frac{\ln x}{x}$ $\quad x=e^2$ $\quad y(e^2)=\frac{\ln e^2}{e^2}=\frac{2\ln e}{e^2}=\frac{2}{e^2}$

$y'=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{(x)^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln e^2}{(e^2)^2}$

$=\frac{1-2}{e^4}=\frac{-1}{e^4}$ $\quad m=\frac{-1}{e^4}$ $\quad$ نقاط $(e^2, \frac{2}{e^2})$

SHAFAGH

Subject:
Year: Month: Date:

$$\Rightarrow y-\frac{2}{e^2}=\frac{-1}{e^4}(x-e^2)=\frac{-1}{e^4}x+\frac{1}{e^2}$$

$$y=\frac{-1}{4}x+\frac{1}{e^2}+\frac{2}{e^2}=\boxed{\frac{-1}{e^4}x+\frac{3}{e^2}}\Rightarrow$$ یا $-e^{-4}x+3e^{-2}$

معادله خط قائم :

$$y-f(a)=\frac{-1}{m}(x-a)$$ معادله خط قائم بر منحنی در نقطه $(a,f(a))$

$y=x^2+x+2$ $\quad x=0$ $\quad y(0)=2$

$y'=2x+1$ $\quad y'(0)=1$ $\quad (0,2)$

شیب خط قائم بر نمودار $=m'=-1$ $\quad y-2=-1(x-0)\Rightarrow\boxed{y=-x+2}$

مثال $= y=\dfrac{x+2}{x-1}$ $\quad x=5$

$$y(5)=\frac{7}{4}\qquad y'=\frac{x-1-(x+2)}{(x-1)^2}=\frac{\overbrace{\cancel{x}-1-\cancel{x}-2}^{-3}}{(x-1)^2}=$$

$$y'(5)=\frac{-3}{(5-1)^2}=\frac{-3}{16}$$ شیب خط مماس

$$y-\frac{7}{4}=\frac{-3}{16}(x-5)=\frac{-3}{16}x+\frac{15}{16}$$ «خط قائم»

$$y=\frac{-3}{16}x+\underbrace{\frac{15}{16}+\frac{7}{4}}_{\frac{43}{16}}=\frac{-3}{16}x+\frac{43}{16}$$

SHAFAGH

$$\Rightarrow 16\cdot y=-3x+43$$ معادله خط مماس

$$y-\frac{7}{4}=\frac{16}{3}(x-5)\Rightarrow\frac{16}{3}x-\frac{80}{3}$$ ۲) معادله خط قائم

Subject:
Year: Month: Date:

$y=\cos^5(x^2-1)$ $y=\cos^n u$ $y'=n\cos^{n-1}(u)(-\sin u)u'$

$y'=5\cos^4(x^2-1)(-\sin(x^2-1))2x=(-10x)(\cos^4(x^2-1))(\sin(x^2-1))$

تعیین جهت تغییرات: شیب خط مماس x قائم ⇐ ۱-

اگر ($f(x_1)<f(x_2)$) $x_1<x_2: f(x_1)\leq f(x_2)$ صعودی

اگر ($f(x_1)>f(x_2)$) $x_1<x_2: f(x_1)\geq f(x_2)$ نزولی

اگر $x_1=x_1$ $x_2=x$ در این صورت $x_1<x \Rightarrow x-x_1>0$

$\Rightarrow f(x_1)\leq f(x) \Rightarrow f(x)-f(x_1)\geq 0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\geq 0$

$\Rightarrow f'(x_1)=\lim_{x\to x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\geq 0$ در حالت صعودی $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0$

$f(x_1)>f(x)\Rightarrow f(x)-f(x_1)\leq 0 \Rightarrow \lim\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leq 0$

$f'(x)\leq 0$ در حالت نزولی

تعریف: فرض کنیم تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق پذیر باشد اگر $f'(x)>0$ $\forall x\in(a,b)$

$f'(x)<0$

آنگاه تابع $f(x)$ اکیداً صعودی است

اکیداً نزولی

SHAFAGH

Subject:
Year: Month: Date:

مثال $y=x^3 \Rightarrow y'=3x^2$ $\quad D=\mathbb{R}$

چون مشتق تابع در $\mathbb{R}$ مثبت است تابع صعودی است.

اکیداً صعودی $y=x^2$ $\quad D=(0,+\infty)$ $\quad y'=2x>0$ $\quad \forall x\in D$

اگر $D=\mathbb{R}$ بنابراین مشتق دیگر بازای $x\in D$ نه مثبت بود و نه منفی پس نه صعودی و نه نزولی

نکته: برای تعیین صعودی و نزولی بودن تابع $y=f(x)$ در دامنه‌اش، ابتدا مشتق تابع f را بدست آورده و ریشه‌ی آن را یافته، علامت مشتق می‌کنیم.

$y=x^2 \quad y'=2x=0 \quad x=0$

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

در بازه $(0,+\infty)$ تابع صعودی و از $(-\infty,0)$ نزولی است.

مثال: $y=x^2-3x+1 \quad y'=2x-3=0$

$x=\frac{3}{2}$

	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$

***

مثال $= y=-\frac{x^3}{3}-x+1$ $\qquad y'=-\frac{3x^2}{3}-1=-x^2-1$

$-(x^2+1) \qquad x^2+1>0$

$x^2\geq 0$ $\qquad \forall x\in R: x^2\geq 0 \rightarrow x^2+1>0$

اکیداً نزولی

Subject:
Year: Month: Date:

مثال = $y=-x^4-x^2+1$; $y'=-4x^3-2x=0$

فاکتور $-2x(2x^2+1)=0$ $\quad -2x=0$ $\quad \boxed{x=0}$ $\quad 2x^2\geq 0 + 2x^2+1>0$

$\forall x\in\mathbb{R}$

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	↗	1	↘

صعودی $(-\infty,0)$

نزولی $(0,+\infty)$

$2x^2+1$ ریشه ندارد

مثال: x^3+3x^2+mx حدود m را طوری تعیین کنید که همواره صعودی باشد.

$y'=3x^2+6x+m$

ax^2+bx+c $\quad \Delta<0$ و $a>0$

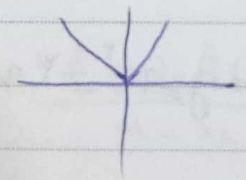
$\Delta<0$ و $a<0$ مثبت $\quad$ منفی

$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow 36-3\times4\times m=36-12m<0$

$36<12m \Rightarrow \boxed{3<m}$

نکته: اگر تابعی درجه ۲ مانند ax^2+bx+c داشته باشیم «***********»

$f(x)=|x| \Rightarrow \begin{cases} x & x>0 \\ -x & x<0 \end{cases}$



$f'(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	↘		↗

نزولی $(-\infty,0)$

صعودی $(0,+\infty)$

$y=|x-1|=\begin{cases} x-1 & x>1 \\ -x+1 & x<1 \end{cases}=\begin{cases} 1 & x>1 \\ -1 & x<1 \end{cases}$

	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	↘		↗

SHAFAGH
«Math»

Subject:
Year: Month: Date:

نکته: به نقاط ماکزیمم یا مینیمم نسبی یک تابع اکسترمم نسبی گوییم.

ماکزیمم و مینیمم نسبی و مطلق:

تعریف: برای اینکه تابع $y=f(x)$ در نقطه $x=c$ دارای اکسترمم نسبی باشد باید در بازه بازی از نقطه $x=c$ پیوسته و در $x=c$ تعریف شده باشد.

همچنین، در همسایگی $x=c$ مشتق $x=c$ باشد. $(c, f(c))$ ***

نکته: تابع $y=f(x)$ در نقطه $(c, f(c))$ دارای اکسترمم نسبی است اگر مشتق در آن نقطه تغییر علامت دهد. اگر تابع در سمت راست نقطه $(c, f(c))$ منفی و در سمت چپ آن مثبت باشد نقطه $(c, f(c))$ نقطه مینیمم نسبی است.

و برعکس اگر در سمت راست مثبت و در سمت چپ منفی باشد ماکزیمم نسبی است.

نکته: نقاطی که مشتق تابع را صفر می‌کنند می‌توانند کاندیدی برای اکسترمم بودن باشند.

روش تعیین نقاط اکسترمم نسبی یک تابع:

۱- مشتق تابع را بدست می‌آوریم

۲- ریشه‌های مشتق تابع را بدست می‌آوریم

۳- ریشه‌های مشتق را تعیین علامت می‌کنیم

۱- اگر تغییر علامت از مثبت به منفی بود، نقطه ماکزیمم نسبی است

۲- اگر تغییر علامت از منفی به مثبت بود، نقطه مینیمم نسبی است.

مثال $\Rightarrow y = x^2$

$\Rightarrow y' = 2x$

$\Rightarrow 2x = 0 \quad x = 0$

$\Rightarrow$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$(0,0)$ مینیمم نسبی

SHAFAGH

مثال = $y = x^3$ ① $y' = 3x^2$ ② $3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

③

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

$(0,0)$ همواره صعودی است.

تعریف: نقطه‌ی $x=c$ را نقطه بحرانی تابع $f(x)$ گوییم هرگاه $f'(c)=0$ یا در نقطه c مشتق f وجود نداشته باشد.

نکته: برای تعیین اکسترمم‌های نسبی یک تابع نقاط بحرانی آن را بدست آورده و تعیین علامت می‌کنیم.

مثال: $y = x^3 - x^2 - x$ $y' = 3x^2 - 2x - 1 = 0$, $\Delta = (-2)^2 - 4(3)(-1) = 16$

$x = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+4}{6} = 1$ و $\frac{2-4}{6} = \frac{-1}{3}$

x	$-\infty$	$\frac{-1}{3}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{5}{27}$	$\searrow$ -1	$\nearrow$

max
نقطه ماکزیمم نسبی $A(\frac{-1}{3}, \frac{5}{27})$

نقطه مینیمم نسبی $B(1,-1)$

مثال $y = |x-1| \rightarrow x-1=0 \quad x=1$ $y = |x-1| \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -x+1 & x \leq 1 \end{cases}$

$y' = \begin{cases} 1 & x \geq 1 \\ -1 & x \leq 1 \end{cases}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

نقطه مینیمم نسبی $A(1,0)$

$f'_+(1) \neq f'_-(1)$ پس تابع در $x=1$ مشتق ندارد.

نکته: تابعی که همواره صعودی و نزولی باشد اکسترمم نسبی ندارد.

مثال = $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$ $y' = x^2 + x + 1 \Rightarrow$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow -3 < 0$ $\Delta < 0 \Rightarrow$ $a>0$, $y>0$

SHAFAGH

تابع همواره صعودی است $y'>0$ ← اکسترمم نسبی ندارد

نکته) برای تابع $y=ax^2+bx+c$ وقتی $\Delta<0$ باشد بنابراین y' ریشه ندارد.

مینیمم

اکسترمم مطلق: تعریف: تابع $y=f(x)$ در یک بازه دارای ماکسیمم مطلق است اگر در این بازه x_0 ای یافت شود که به ازای هر x در آن بازه داشته باشیم

$f(x)\geq f(x_0) \Leftarrow f(x)\leq f(x_0)$

برای تعیین اکسترمم مطلق تابع $y=f(x)$ در بازه $[a, b]$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱) نقاط بحرانی را به دست می‌آوریم.
۲) مقدار تابع را به ازای نقاط بحرانی به دست می‌آوریم
۳) $f(a)$ و $f(b)$ را به دست می‌آوریم
۴) مقادیر به دست آمده را در (۲) و (۳) مقایسه می‌کنیم

مثال $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}$ $[-2,1]$ $y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}\neq 0$

$x+1=0$ $\boxed{x=-1} \to -1\in[-2,-1]$ ✓

مقدار تابع را به ازای این نقاط بحرانی به دست می‌آوریم $f(1)=\sqrt[3]{4}$ $f(-2)=1$ $f(-1)=0$

نقطه $(-1,0)$ نقطه مینیمم مطلق و $(1,\sqrt[3]{4})$ ماکزیمم مطلق است.

$y=x^4-8x^2+16$ $[-1,4] \longrightarrow (x^2)^2-2(4)x^2+(4)^2=(x^2-4)^2$

$y'=(2x)(2)(x^2-4)=0$ $2x=0 \to x=0$ $x^2-4=0 \to x^2=4 \to x=\pm 2$

SHAFAGH

$f(0)=16$ $0\in[-1,4]$

$f(2)=0$ $2\in[-1,4]$

سه جواب داریم.

ادامه صفحه بعد

Subject:
Year: Month: Date:

پس نقطه ۰ و ۲ را بررسی می‌کنیم عضویت $-2 \notin [-1,4]$

نقطه (۰و۲) مینیمم مطلق و $f(4)=144$ $f(-1)=9$

نقطه (۴،۱۴۴) ماکزیمم مطلق است. $y=\sin x+x$ $[0,2\pi]$

$y'=\cos x+1 \Rightarrow \boxed{\cos x=-1}$ $\boxed{x=\pi}$ $f(\pi)=\sin\pi+\pi=\pi$ $f(0)=\sin(0)+0=0$

$f(2\pi)=\sin 2\pi+2\pi=2\pi$ (۰و۰) نقطه مینیمم مطلق (۲π،۲π) ماکزیمم مطلق

تعیین جهت تقعر و نقطه عطف:

تعریف: تابع در نقطه $(c,f(c))$ دارای تقعر رو به بالاست اگر $f'(c)$ موجود باشد

یعنی در نقطه خط مماس موجود باشد · رو به پایین · رو به پایین

و به ازای یک بازه باز اطراف نقطه c به ازای هر x در این بازه نقطه $(x,f(x))$ بالای خط مماس · پایین

مماس بر نقطه $(c,f(c))$ باشد. نکته) اگر تابع $y=f(x)$ در نقطه $(c,f(c))$ دارای خط

مماس باشد پس الف) $f''(c)>0$ بنابراین تابع در نقطه $(c,f(c))$ تقعر رو به بالا

دارد. ب) $f''(c)<0$ " " " " " " " " رو به پایین دارد

نقطه عطف: فرض کنیم تابع $y=f(x)$ یک خط مماس داشته باشد و یک همسایگی

باز اطراف $x=c$ تعریف شده باشد. آنگاه نقطه $(c,f(c))$ نقطه عطف تابع است اگر

مشتق دوم در این نقطه تغییر علامت دهد. نکته) نقاطی که مشتق دوم تابع در آنها صفر

می‌شود یا وجود ندارد می‌توانند نقاط عطف باشند. نکته) اگر در نقطه $(c,f(c))$ خط مماس

موجود باشد و $f''(c)$ وجود داشته باشد در این نقطه تغییر علامت دهد پس $f''(c)=0$ است

SHAFAGH

Subject:
Year: Month: Date:

رسم نمودار «$y = ax^2 + bx + c$»

۱) تعیین دامنه $D = R$

۲) مشتق تابع را بدست می آوریم $y' = 2ax + b = 0 \quad x = \frac{-b}{2a}$

$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ نقطه اکسترمم تابع

$a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c =$

۳) حد تابع را وقتی $x \to \mp\infty$ بدست می آوریم.

۴) نقاط تلاقی تابع با محورهای مختصات را بدست می آوریم.

① $x = 0 \quad y = c \quad (0, c)$

② $y = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$ ریشه ها را بدست می آوریم

۵) جدول تغییرات تابع را رسم می کنیم.

$a > 0$ نقطه مینیمم

$a < 0$ ماکزیمم

مثال $y = x^2 + 4x - 1$

① $D = R$ ② $\Rightarrow 2x + 4 = 0 \quad x = -2$

$(-2)^2 + 4(-2) - 1 = -5$

$(-2, -5)$ نقطه اکسترمم

نقطه مینیمم

③ $\lim\limits_{x \to \mp\infty} x^2 + 4x - 1 = \lim\limits_{x \to \mp\infty} x^2 = +\infty$

$x = 0$ ④ $= (0)^2 + 4(0) - 1 = -1$

SHAFAGH

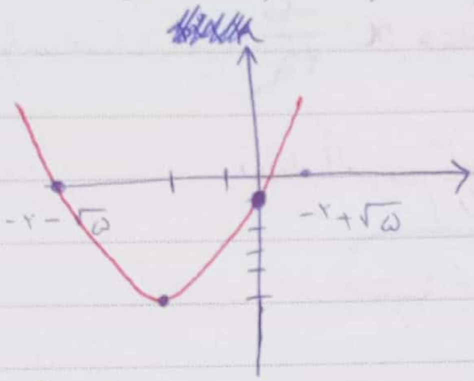
$y = 0 = x^2 + 4x - 1 = 0 \to \Delta \Rightarrow \begin{cases} x_1 \Rightarrow -2 + \sqrt{5} \\ x_2 \Rightarrow -2 - \sqrt{5} \end{cases}$

Scanned by CamScanner

Subject:
Year: Month: Date:

(ادامه سؤال صفحه قبل) ۵) رسم جدول تغییرات.

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{5}$		-2		0		$-2+\sqrt{5}$		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$+$		$+$		$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↘	-5	↗	-1	↗	0	↗	$+\infty$



مثال $= -x^2+3x$

① $D = R$

② $y' = 2x+3 = 0 \leftarrow x = \frac{3}{2} \leftarrow$ جایگذاری در

نقطه اکسترمم تابع $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ نقطه ماکزیمم

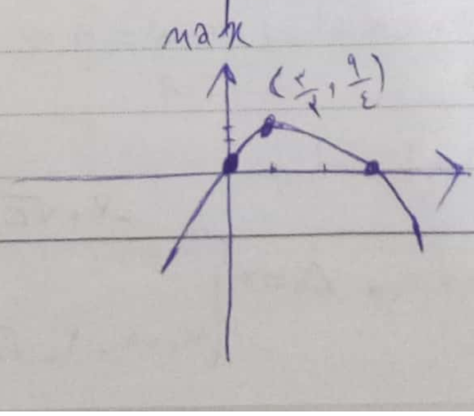
③ $\lim_{x\to\mp\infty} -x^2+3x = \lim_{x\to\mp\infty} -x^2 = -\infty$

④ $x=0 \Rightarrow y=0 \quad (0,0) \qquad y=0 \quad -x^2+3x=0$

$\Rightarrow x(-x+3)=0 \quad \boxed{x=0} \quad -x+3=0 \quad \boxed{x=3}$

۵)

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
y'		$+$		$+$		$-$		$-$	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{9}{4}$ max	↘	0	↘	$-\infty$



نکته: محور تقارن یعنی خط $x=\frac{-b}{2a}$ می باشد.

SHAFAGH

Subject:
Year: Month: Date:

رسم نمودار $y=x^2+x+1$ $D=R$

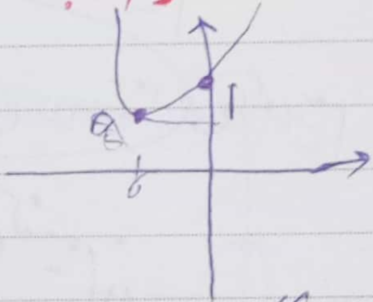
$y'=2x+1 \Rightarrow 0 \quad x=\frac{-1}{2}$ $(\frac{-1}{2}, \frac{3}{4})$ نقطه اکسترمم تابع
نقطه مینیمم تابع

$\lim_{x\to\mp\infty} x^2+x+1 = \lim_{x\to\mp\infty} x^2 = +\infty$

$x=0 \quad y=1 \quad (0,1)$ $\quad y=0 \quad x^2+x+1=0 \quad \Delta=(1)^2-4(1)(1)=-3$

$\Delta<0 \ , \ a>0$ $\quad x^2+x+1>0$ همواره مثبت

	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	0	$+\infty$
y'	$-$	$+$	$+$	
y	$+\infty \searrow$	$\frac{3}{4}$ Min $\nearrow$	$1 \nearrow$	$+\infty$



نکته) اگر ۰<Δ باشد تابع ریشه دارد یعنی محور x ها را قطع می کند

نکته) اگر ۰>Δ و ۰<a شکل تابع بالای محور x ها می افتد و ۰>Δ و ۰>a
شکل تابع پایین محور x ها می افتد...

مثال: $y=(-m^2+1)x^2-3mx$ m را طوری بیابید که تابع دارای نقطه مینیمم باشد.

$-m^2+1>0 \Rightarrow m^2<1 \quad -1<m<1$

$y=-2x^2-mx+1$
حدود m را طوری تعیین کنید که شکل تابع بالای محور x ها باشد.
$a>0$ و $\Delta<0$

$2>0 \quad \Delta=b^2-4ac \Rightarrow m^2-8<0 \Rightarrow m^2<8 \quad -\sqrt{8}<m<\sqrt{8}$

SHAFAGH

$\boxed{-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}}$

Subject:
Year: Month: Date:

رسم نمودار درجه ۳ $y=ax^3+bx^2+cx+d$

۱) دامنه تابع را می‌نویسیم $D=R$

۲) حد تابع را وقتی $x\to\pm\infty$ را می‌یابیم.

۳) مشتق تابع را نوشته و اکسترمم‌های تابع را بدست می‌آوریم.

۴) با کمک مشتق دوم نقطه عطف تابع را مشخص می‌کنیم

۵) نقاط تلاقی با محورهای مختصات را به دست می‌آوریم.

۶) جدول تغییرات و شکل تابع را رسم می‌کنیم.

مثال: x^3 ① $D=R$ ② $\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ $\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

(۳) $3x^2\geq 0$ است y همواره صعودی

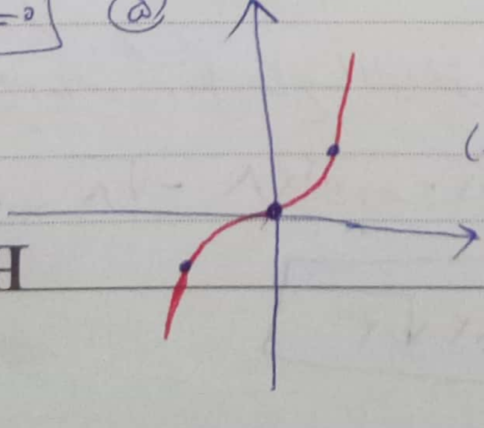
«یعنی اکسترمم ندارد.»

$y''=6x=0$ $x=0$

	$-\infty$	0	$+\infty$
y''	$-$		$+$

(۰،۰) نقطه عطف می‌باشد.

$\boxed{x=0\to y=0}$ ⑤



نقاط کمکی: (۱،۱) و (۱-،۱-)

«به دلخواه می‌گذاریم»

	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	+	+	+	
y	$-\infty$ ↗	-1 ↗	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

Subject:
Year: Month: Date:

$y = 2x^3 - 6x^2 + 1 \qquad D = R$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 - 6x^2 + 1 = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} 2x^3 - 6x^2 + 1 = -\infty$

$y' = 6x^2 - 12x = 0 \qquad 6x(x-2) = 0 \qquad x = 0 \to y = 1$

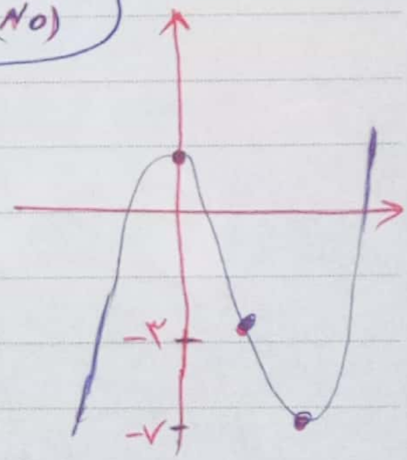
$x = 2 \to y = -7$

نقاط اکسترمم نسبی تابع هستند $(2, -7)$ مینیمم $(0, 1)$ ماکزیمم

$y'' = 12x - 12 \qquad x = 1 \to y = -3 \qquad (1, -3)$ نقطه عطف ✓

$* \; x = 0 \to y = 1 \qquad y = 0 \quad 2x^3 - 6x^2 + 1 = 0$ (No)

	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y'	+	−	−	+	
y	$-\infty \nearrow$ 1	$\searrow -3$	$\searrow -7$	$\nearrow$	$+\infty$
	max		min		



مثال برای نقطه عطف $* \Rightarrow y = x^4 - 3x^3 - 6x^2$

نقطه عطف

$y' = 4x^3 - 9x^2 - 12x \qquad y'' = 12x^2 - 18x - 12 = 0$

فاکتورگیری $6(2x^2 - 3x - 2) = 0 \qquad 2x^2 - 3x - 2 = 0 \qquad \Delta \to x_1 = 2$

$x = \frac{-1}{2}$

تغییر علامت

	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	−	+	
$f'(x)$	∪	∩	∪	
		$-\frac{1}{16}$	-31	

نقطه عطف $\left(\frac{-1}{2}, -\frac{1}{16}\right)$

نقطه عطف $(2, -31)$

SHAFAGH

$\boxed{***}$ ****

***

Subject:
Year: Month: Date:

«تابع هموگرافیک : »

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

$c\neq 0$ $\quad cx=0 \rightarrow y=\frac{ax+b}{d}$ $\quad \frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$ تابع خطی

۱) مجانب های آن را بدست می آوریم.

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax+b}{cx+b}=\frac{a}{c}$ مجانب افقی $\qquad$ مجانب افقی $y=\frac{a}{c}$

مجانب قائم $x=\frac{-d}{c}$

$cx+d=0 \quad x=\frac{-d}{c}$ مجانب قائم

برای رسم نمودار تابع هموگرافیک

۱) مجانب های آن را بدست می آوریم ۲) مشتق تابع را بدست می آوریم.

$$y'=\frac{a(cx-d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}=\frac{a\cancel{c}x+ad-cax-cb}{(cx+d)^2}$$

$$=\frac{ad.cb}{(x+d)^2} *** \Longrightarrow y'>0 \text{ یا } y'<0$$

اکیداً صعودی $\qquad$ اکیداً نزولی

پس اکسترمم ندارد ...

نکته) تابع هموگرافیک اکسترمم ندارد چون اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.

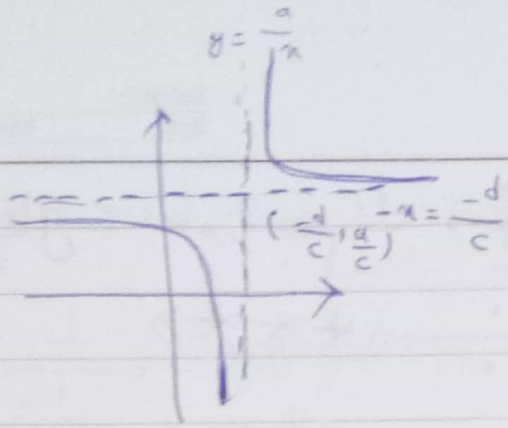
۳) نقاط تلاقی نمودار را با محور های مختصات به دست می آوریم.

۴) جدول تغییرات و شکل تابع را می کشیم.

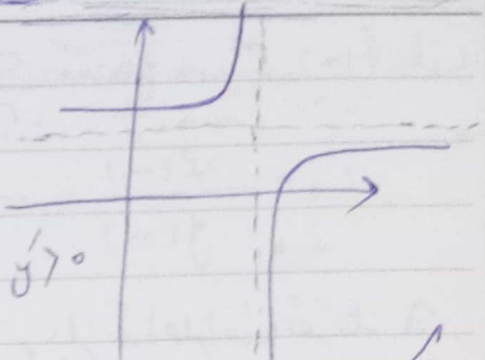
SHAFAGH

***

Subject:
Year: Month: Date:



در حال نزول نزولی
$y'<0$



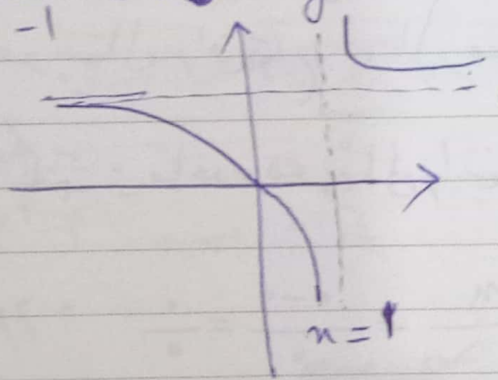
$y'>0$

نکته) نقطه‌ی $(\frac{-d}{c},\frac{a}{c})$ مرکز تقارن، شکل تابع هموگرافیک می‌باشد.

مثال: $y=\frac{2x}{x-1}$ مجانب قائم $x=1$ مجانب افقی $y=2$

$y'=\frac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2}=\frac{2x-2-2x}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}<0$ تابع همواره نزولی

$x=0 \Rightarrow y=\frac{0}{-1}=0$ $y=0$ $2x=0$ $x=0$ $A(0,0)$



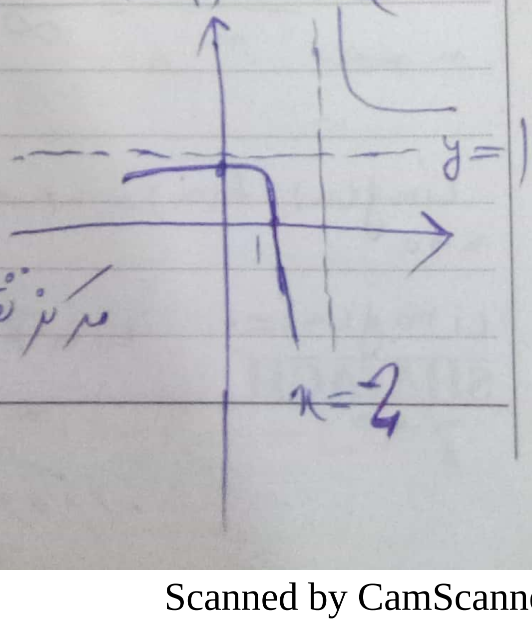
مرکز تقارن $(1,2)$

مثال: $y=\frac{x-1}{x-2}$ مجانب افقی $y=1$

مجانب قائم $\Rightarrow x=2$ $y'=\frac{\cancel{x}-2-\cancel{x}+1}{(x-2)^2} \Rightarrow \frac{-1}{(x-2)^2}<0$ همواره نزولی

$x=0$ $y=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$ $A(0,\frac{1}{2})$

$y=0$ $x-1=0 \Rightarrow x=1 \to B(1,0)$



مرکز تقارن: $(2,1)$

SHAFAGH

قاعده هوپیتال : صور مبهم $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ و $\lim_{x\to 0} g(x)=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0} \quad \text{«***»}$$

قضیه: فرض کنیم توابع f و g در یک همسایگی باز I اطراف نقطه a

که a می تواند ∞ هم باشد) مشتق پذیر باشد و بازای هر $x\neq a$ در همسایگی

باز a : $g'(x)\neq 0$ باشد و $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$ آنگاه اگر

$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ آنگاه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$

نکته) قاعده هوپیتال را می توان به طور متوالی به کار برد تا به جواب نهایی

رسید. نکته: قاعده هوپیتال را تنها برای حالت $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ می توان

استفاده نمود. مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x}=\frac{0-0}{0}=\frac{0}{0}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1}=\frac{1-1}{1}=\frac{0}{1}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\frac{\infty}{\infty} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

$\lim_{x\to a} g(x)\cdot f(x)=0\times\infty$ $\boxed{\infty-\infty \text{ و } 0\times\infty}$ صور مبهم

$\lim_{x\to a} g(x)=0$ $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ $\lim_{x\to a} g(x)f(x)=\lim\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{\infty}{\infty}$

در این حالت می توان از قاعده هوپیتال استفاده کرد.

Subject:
Year: Month: Date:

مثال:
$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0\times\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

نکته: برای استفاده از قاعده ی هوپیتال در حالت $\infty\times 0$ تابع را بصورت کسری در می‌آوریم بطوریکه حد آن حالات مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ را بپذیرد.

بنابراین با استفاده از قاعده هوپیتال حد تابع را بدست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2-2x}-x \times \frac{\sqrt{x^2-2x}+x}{\sqrt{x^2-2x}+x}$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4} = \infty-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x+2-4}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x^2-4} = \frac{0}{0}$$

«Math»

«حالات مبهم 0^0 و 1^∞ و ∞^0»

$$y = f(x)^{g(x)} \qquad \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 0^0 \text{ یا } 1^\infty \text{ یا } \infty^0$$

$$\lim_{x\to a} y = \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} =$$ از طرفین Ln می‌گیریم $$\ln(\lim_{x\to a} y) = \ln(\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)})$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\ln y = \lim_{x\to a}\ln f(x)^{g(x)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} g(x)\ln(f(x)) = \lim_{x\to a} g(x)\times \lim \ln f(x) = 0\times\infty$$

SHAFAGH

حتماً حالت $\infty\times 0$ پیش می‌آید که باید رفع ابهام شود.

Subject:
Year: Month: Date:

$$\lim_{x\to a} g(x) \times \lim_{x\to a} \ln f(x) = b$$ بعد از رفع ابهام ***

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \ln y = b \to \boxed{\lim_{x\to a} y = e^b}$$ جواب نهایی

$$e^{\ln y} = y = e^b$$

$$\lim_{x\to 0^+} (\tan x)^{\sin x} = 0^0$$

بالعکس

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \sin x \ln \tan x = 0 \times \infty.$$ باید رفع ابهام شود

جا به جا کردیم

$$\lim_{x\to 0^+} \cancel{\ldots} = \lim \frac{\ln \sin x}{\cot x} = \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{1+\cot^2 x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x}{1+\cot^2 x} \Rightarrow \frac{0}{1+1} = \frac{0}{2} \Rightarrow 0 \to \lim_{x\to 0^+} y = e^0 = 1$$ *****

مثال: $$\lim_{x\to +\infty} (e^x + x)^{\frac{2}{x}} = \infty^0 \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} \ln y = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x} \ln(e^x + x)$$

$$= 0 \times \infty \longrightarrow$$ رفع ابها $$= \lim_{x\to +\infty} \frac{2\ln(e^x+x)}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\left(\frac{e^x+1}{e^x+x}\right)}{1} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to +\infty} \frac{2e^x}{e^x+1} = 2 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} y = e^2$$ جواب نهایی

SHAFAGH

17:34 $\boxed{۱۷:۳۴}$ پایان: یکشنبه